Franco Ghione
(Università "Tor Vergata" di Roma)

LA PROSPETTIVA SCIENTIFICA

1. Le origini della prospettiva: l'Ottica di Euclide

È ben nota l'ostilità di Platone nei confronti dell'arte imitativa, compresa la poesia e la pittura: «la pittura, e in generale l'arte imitativa, realizza la sua opera ben lungi dalla verità, ha uno stretto rapporto di familiarità e amicizia con ciò che in noi è lontano dall'intelletto e non si prefigge alcuno scopo sano e veritiero» (Plat. *Resp.* X).

L'argomento principale a sostegno di questa tesi si basa su tre presupposti che ora riassumiamo.

1. La pittura rappresenta un'apparenza: «Ora fa' questa considerazione: qual è lo scopo della pittura verso ogni singolo oggetto? Imitarlo com'è in realtà o come appare? Insomma, è imitazione dell'apparenza o della verità?» (Plat. *Resp.* X).

2. L'apparenza non è misurabile:

> 'E le stesse cose appaiono curve e diritte a seconda che le si guardi dentro o fuori dall'acqua, e concave e convesse a causa dell'illusione ottica relativa ai colori; ed è evidente che tutta questa confusione si produce nell'anima. Perciò la pittura a chiaroscuro, puntando su questa debolezza della nostra natura, non tralascia nessuna forma di inganno, così come la magia e tutti gli altri artifizi del genere'. 'È vero'. 'Ma misurare, contare e pesare non sono apparsi validissimi ausili contro questi effetti, cosicché in noi non prevale ciò che appare più grande o più piccolo o più numeroso o più pesante, bensì la facoltà capace di calcolare, misurare e pesare?' (Plat. *Resp.* X).

3. La parte dell'anima che si appoggia alla misura e al calcolo è la parte migliore dell'anima: «'Dunque la parte dell'anima che formula un'opinione senza tener conto della misura non sarà identica a quella che la formula tenendone conto'. 'Certo che no'. 'E quella che si affida alla misura e al calcolo sarà la parte migliore dell'anima'. 'Senz'altro'» (Plat. *Resp.* X).

In conclusione: «Pertanto l'arte imitativa, scadente compagna di ciò che è scadente, genera una prole scadente» (Plat. *Resp.*

X). È interessante notare come questa argomentazione sia per certi versi ancora presente nella nostra cultura e sia all'origine di una incomprensione, per non dire avversione, tra la cultura scientifica e quella artistica: l'una indaga la realtà con il pensiero razionale, la misura e la matematica, per l'altra tutto è possibile, senza limitazioni razionali, fuori misura. In questa nota vogliamo contestare il secondo presupposto dell'argomento platonico senza entrare nel merito degli altri due la cui natura appare più che altro filosofica.

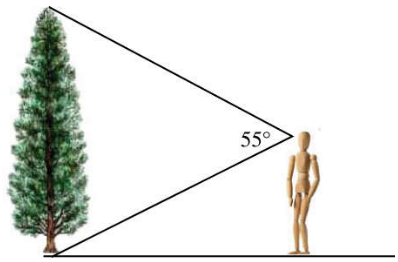
Dobbiamo a Euclide l'ardire e la capacità di aver elaborato un modello matematico del tutto rigoroso per misurare l'apparenza, per misurare ciò che, nella nostra immaginazione, è vago, mutevole e sfuggente. Il modello euclideo è un modello della visione estremamente semplificato, ma permette già, come vedremo, di avere interessanti applicazioni alla rappresentazione prospettica. Si crea in quest'opera un dualismo tra l'essere di un oggetto, cioè la sua forma geometrica, e il suo apparire in funzione di un dato punto di vista. Cambiando punto di vista lo stesso oggetto appare in modi diversi e l'opera euclidea descrive esattamente questo mutamento.

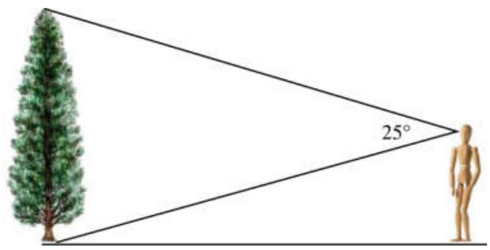
Euclidis de aspectuum diversitate. Manoscritto dell'*Ottica* di Euclide, 1458

Troviamo tutto questo nella sua *Ottica*[1], un'opera ritenuta minore, che prefigura sviluppi inattesi nelle scienze (matematica, astronomia, fisica) e nelle arti (pittura, scultura, scenografia). Il termine 'ottica' va inteso non tanto nel significato attuale che lo colloca in un settore della fisica, quanto nel significato di 'geometria della visione': una particolare geometria che descrive l''aspetto della diversità', come venne titolato un manoscritto dell'*Ottica* euclide uno stesso oggetto appare

[1] In questo articolo ci riferiamo al libro di Euclide nell'edizione a cura di F. Incardona (1996).

più piccolo se guardato da più lontano, ma Euclide, come primo passo, misura le grandezze apparenti attraverso il concetto di *angolo visivo*. Il disco della Luna e quello del Sole appaiono uguali perché li vediamo sotto lo stesso angolo che, in questo caso, misura circa mezzo grado.





L'uomo in alto, dalla sua posizione, vede l'albero 'grande 55 gradi', mentre l'uomo in basso, che si è allontanato dall'albero di qualche passo, lo vede più piccolo: lo vede 'grande 25 gradi'. Sono gli angoli, per Euclide, che possono misurare una grandezza apparente.

La sua *Ottica*, inizia col fissare alcune premesse iniziali dalle quali verranno dedotti, col solo ausilio della logica formale, ben 58 teoremi utili per descrivere l'apparenza di un oggetto in funzione della posizione del punto di vista. Per una traduzione letterale dell'*Ottica* euclidea ci riferiremo, in questo lavoro, a quella di F. Incardona già citata, mentre per una discussione storica e anche didattica di quest'opera di Euclide insieme a quella dei fondatori della prospettiva ci riferiamo al testo di Catastini e Ghione *Le geometrie della visione* (2004).

I concetti base del modello euclideo sono il raggio visivo (una semiretta che esce dall'occhio e raggiunge la cosa vista) e l'angolo visivo, cioè l'angolo che ha vertice nell'occhio ed è formato da due raggi visivi che abbracciano la cosa vista. Ecco le sette premesse iniziali.

I. Sia posto che i segmenti rettilinei–tracciati a partire dall'occhio si portino ad una distanza tra loro di grandi dimensioni.

II. E che la figura formata dai raggi visuali sia un cono avente il vertice nell'occhio e la base sui contorni delle cose viste.

III. E che siano viste quelle cose sulle quali incidono i raggi visuali, mentre non siano viste quelle sulle quali i raggi visuali non incidono.

IV. E che le cose viste sotto angoli più grandi appaiano più grandi, quelle [viste] sotto [angoli] più piccoli più piccole, e uguali quelle viste sotto angoli uguali.

V. E che le cose viste sotto raggi più alti appaiano più in alto, quelle [viste] sotto [raggi] più bassi più in basso.

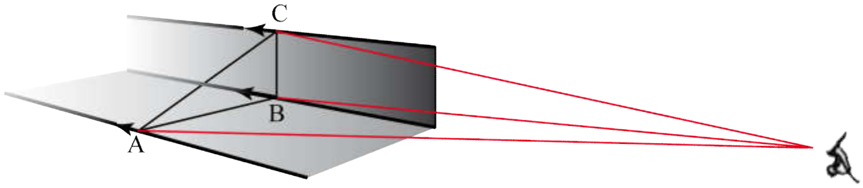
VI. E allo stesso modo che le cose viste sotto raggi più a destra appaiano più a destra, quelle [viste] sotto [raggi] più a sinistra appaiano più a sinistra.

VII. E che le cose viste sotto un maggior numero di angoli appaiano con miglior risoluzione.

La premessa IV ci permette di misurare la grandezza apparente di un oggetto tramite l'angolo visivo, mentre le premesse V e VI, come vedremo dettagliatamente più avanti, ci permettono di misurare la posizione apparente di un punto. Ma, prima di entrare nel merito, cominciamo a illustrare qualche teorema di interesse per il disegno prospettico e tra questi cominciamo dal teorema 6, anche per illustrare al lettore il metodo dimostrativo seguito da Euclide: teorema 6 – *Segmenti paralleli visti da lontano appaiono non paralleli.*

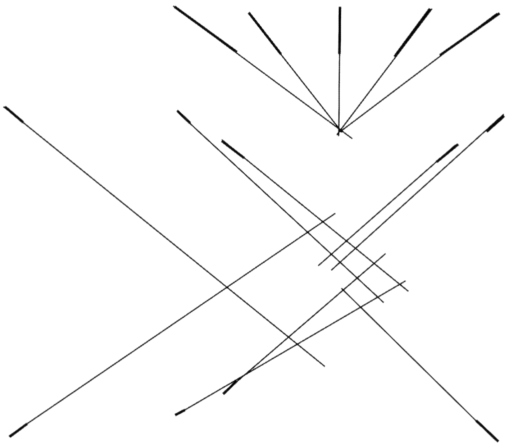
La dimostrazione che Euclide ci fornisce è sviluppata nel caso di due segmenti, ma essa può, con lo stesso argomento, riproporsi per due o più segmenti. Noi consideriamo il caso di tre segmenti.

Consideriamo un piano perpendicolare ai tre segmenti paralleli e siano A, B, C i punti di intersezione tra il piano e i segmenti e O l'occhio che guarda.



Euclide dimostra con considerazioni elementari legate alla geometria dei triangoli – sviluppata negli *Elementi* (Libro I) – che, a mano a mano che il piano si allontana dall'occhio, l'angolo AOB diventa sempre più piccolo e quindi, per la premessa IV, il segmento AB è visto sempre più piccolo e il punto A tende a confondersi con B. Analogamente il punto B si confonde con C e quindi anche A tende a confondersi con C e le tre rette si vedono convergere a un unico punto, perciò appaiono convergenti. L'ipotesi 'visti da lontano' specifica che la posizione dell'occhio deve essere abbastanza lontana dagli estremi dei segmenti. Il teorema potrebbe quindi enunciarsi dicendo che due o più segmenti paralleli, se prolungati, da un certo punto in poi sono visti convergenti a un unico punto.

Già questo semplicissimo teorema, se applicato alla visione di un quadro, potrebbe darci un sostanziale aiuto per fare in modo che la visione del quadro si avvicini alla visione della situazione che il quadro vuole rappresentare. In questa tavola (*Annuncio della morte della Vergine*, dalla Maestà del duomo di Siena, 1308-11) di Duccio da Buoninsegna, larga 54 centimetri, abbastanza per poter verificare l'impianto prospettico, abbiamo evidenziato, in bianco, 14 segmenti che verosimilmente dovrebbero rappresentare segmenti ortogonali al piano di fondo; poiché rette perpendicolari a uno stesso piano sono parallele, tali segmenti nella scena reale sono paralleli: essi dunque, stante il teorema di Euclide, si vedono convergenti a un unico punto.

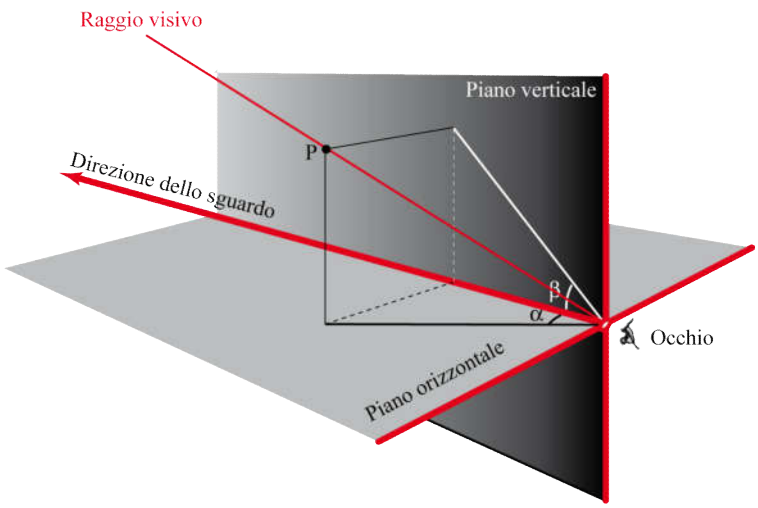


Se vogliamo che la visione del quadro sia isomorfa con la visione reale, i 14 segmenti evidenziati nel quadro, se opportunamente prolungati, dovrebbero essere convergenti a un unico punto. La totale confusione che si evidenzia prolungando i segmenti rende la scena piuttosto scomposta e goffa e mostra come il pittore non avesse assimilato la lezione euclidea. Alberti, uno dei fondatori della prospettiva rinascimentale, così avrà a criticare, con una certa ironia, la mancanza di proporzioni nella rappresentazione di questi angusti ambienti diffusa in tutta la pittura italiana del Trecento:

> Chi dipignesse centauri far briga apresso la cena, sarebbe cosa innetta in tanto tumulto che alcuno carico di vino stesse adormentato. E sarebbe vizio se in pari distanza l'uno fusse più che l'altro

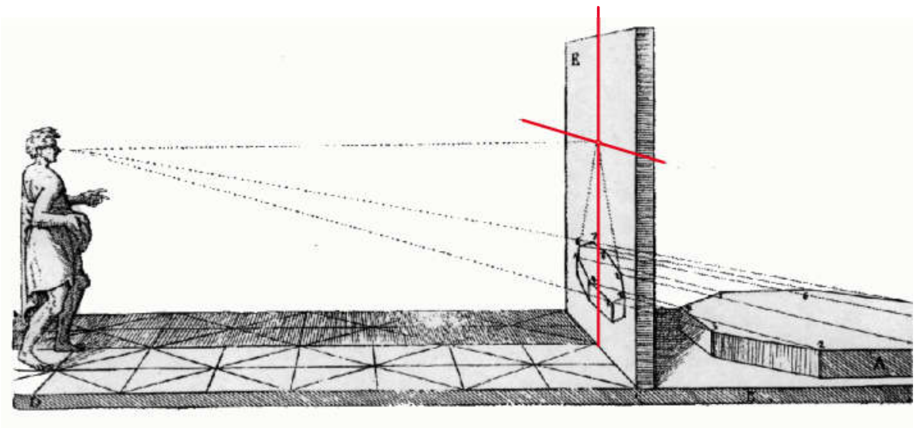
> maggiore, o se ivi fussero e' cani equali ai cavalli, overo se, quello che spesse volte veggo, ivi fusse uomo alcuno nello edificio quasi come in uno scrigno inchiuso, dove apena sedendo vi si assetti. (Alberti 1998, II, 38)

Le premesse V e VI dell'*Ottica* di Euclide, come abbiamo annunciato, permettono di misurare la posizione apparente di un punto nello spazio in funzione della posizione dell'osservatore. La posizione dell'occhio e la direzione dello sguardo (che Alberti chiama «razzo centrico») danno luogo a due piani di riferimento che dividono lo spazio visivo in ciò che è a destra e sinistra, ciò che è in alto e in basso (cfr. la figura seguente).



Abbiamo un piano orizzontale e un piano verticale che passano per la semiretta che ha origine nell'occhio e che indica la direzione dello sguardo. Il generico punto P nello spazio visivo, cioè oltre l'occhio, è colto da un raggio visivo univocamente individuato da due angoli α e β come in figura: in questo caso diciamo che il punto P appare α gradi a sinistra (o a destra) e β gradi in alto (o in basso). In questo modo il modello, che, ripetiamo, è un modello estremamente semplificato della visione, postula (premesse V e VI) che siano i raggi visivi a stabilire la posizione apparente di un punto e quindi che tutti i punti sullo stesso raggio visivo appaiono nella stessa posizione. Questa assunzione ritiene implicitamente trascurabile la distanza dall'occhio: due punti sullo stesso raggio visivo sono visti nella stessa posizione indipendentemente da quanto un punto sia distante dall'occhio. Questa idea, fondamentale nella teoria euclidea della visione, ha origine nei modelli astro-

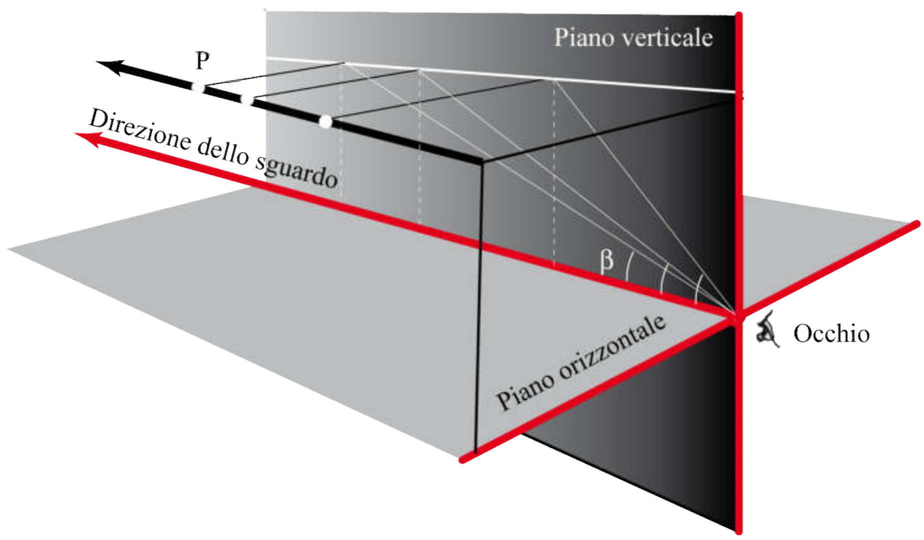
nomici ellenisti: le stelle venivano rappresentate come punti su una teorica volta celeste trascurando la loro reale distanza dalla terra; la posizione della stella era misurata da due angoli – la sola cosa osservabile – che individuavano il raggio visivo col quale le stelle erano di fatto osservate. L'angolo α corrisponde all'ascensione retta, cioè al punto sull'orizzonte nel quale la stella nasce, e l'angolo β alla declinazione, cioè alla sua altezza sull'orizzonte. La mancanza dei numeri negativi per indicare gli angoli rendeva il linguaggio più complicato, ma non dava luogo a nessun ostacolo teorico. Gli angoli α e β vanno considerati sempre positivi e minori di un angolo retto e le parole alto, basso, destra e sinistra stanno a significare il segno dell'angolo: α gradi a destra sta per +α e α gradi a sinistra sta per –α. Lo stesso per l'angolo β che misura l'altezza sul piano orizzontale: β gradi in alto sta per +β e β gradi in basso sta per – β. I punti sul piano orizzontale sono quelli che non sono né in alto né in basso, per i quali quindi α=0, mentre quelli sul piano verticale sono quelli che non sono né a destra né a sinistra, per i quali quindi α=0.
Una conseguenza importante del modello euclideo, ben compresa dai pittori rinascimentali, è che una rappresentazione fedele di una scena reale si ottiene proiettando da un dato centro (l'occhio) i punti che si vogliono rappresentare sul quadro.



I punti di un oggetto qualsiasi al di là del quadro possono essere spostati lungo il loro raggio visivo, avvicinandoli all'occhio fino a raggiungere il piano del quadro; poiché due punti sullo stesso raggio visivo sono visti ugualmente, i punti proiettati danno luogo a una rappresentazione dell'oggetto sul quadro, la cui visione, se l'occhio di chi guarda il quadro è posto nel centro di proiezione, è la stessa dell'oggetto reale. Dal punto di vista del pittore sono dunque la proiezione sul piano del quadro e le proprietà geometriche di questa proiezione ad avere il massimo interesse, ma per quel che riguarda la geometria della visione e il suo ambito di applicazioni questa è una limitazione ingiustificata. La teoria euclidea infatti ha l'ambizione di fornire gli strumenti teorici alla base non solo della pittura, ma anche dell'astronomia descrittiva, della scenografia teatrale –massimamente importante nel mondo antico –, della scultura di bassorilievi e di statue giganti proporzionate in modo che appaiano a vederle da lontano come sono nella realtà.

2. Come viene visto un punto che si allontana dall'occhio all'infinito lungo una data semiretta? Come viene vista la profondità?

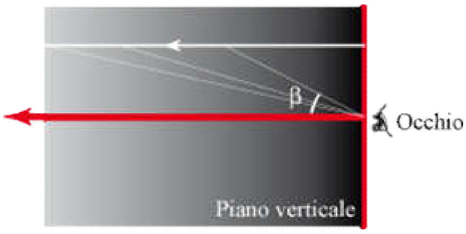
Consideriamo una retta parallela al piano orizzontale, sopra l'occhio; che sia a destra o a sinistra dell'occhio non importa. Consideriamo la sua proiezione ortogonale sul piano verticale: poiché la retta è parallela al piano orizzontale, tale proiezione sarà parallela alla direzione dello sguardo.

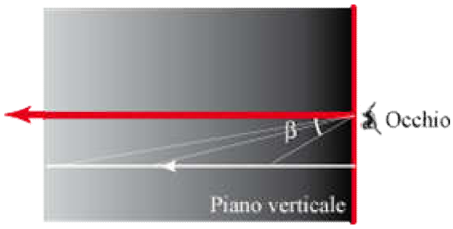


P sta su una retta parallela al piano orizzontale

Un punto P appare alto β gradi e a mano a mano che il punto P si allontana dall'occhio l'angolo β diminuisce, per cui il punto P appare sempre più in basso.

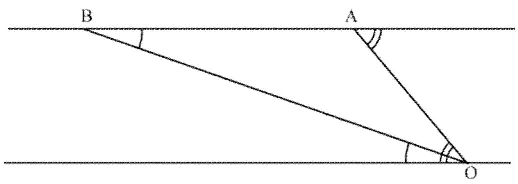
Ovviamente se la retta parallela al piano orizzontale si trova sotto l'occhio, il punto P è visto sotto β gradi e, a mano a mano che il punto P si allontana, l'angolo β diminuisce e il punto P è visto sempre meno sotto e, di conseguenza, appare alzarsi a mano a mano che si allontana dall'occhio.



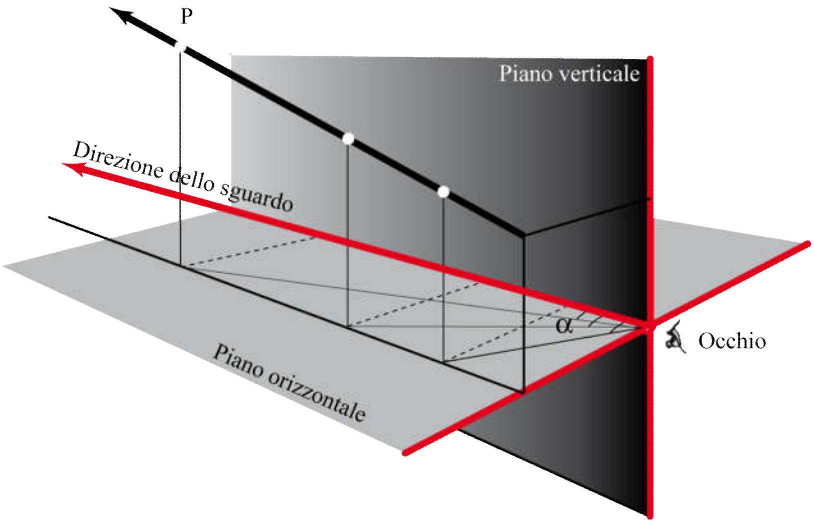


Ecco gli enunciati euclidei: teorema 10 – *Tra i piani che giacciono sotto l'occhio quelli più lontani appaiono più in alto*, teorema 11 – *Tra i piani che stanno sopra l'occhio i più lontani appaiono più in basso.*

La dimostrazione euclidea di questi due teoremi si basa sulla geometria dei triangoli trattata negli *Elementi* (Libro I). In particolare, si utilizza la teoria del parallelismo – se due rette sono parallele gli angoli alterni interni sono uguali – e il teorema dell'angolo esterno. Basta osservare che nel triangolo OAB l'angolo esterno in A è maggiore dell'angolo interno in B.

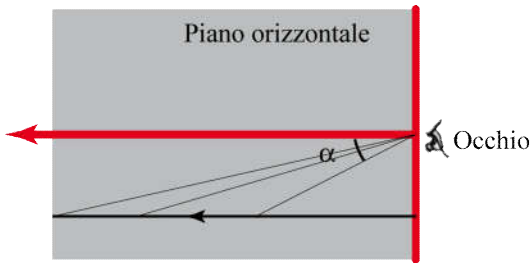


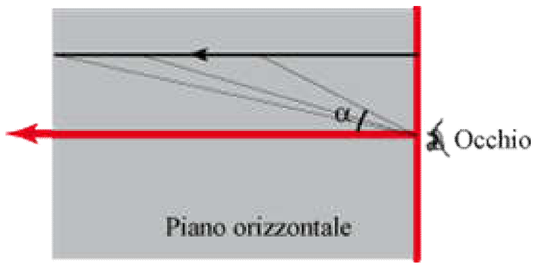
Il teorema successivo riguarda la visione di un punto che si allontana dall'occhio lungo una retta parallela al piano verticale.



P sta su una retta parallela al piano verticale

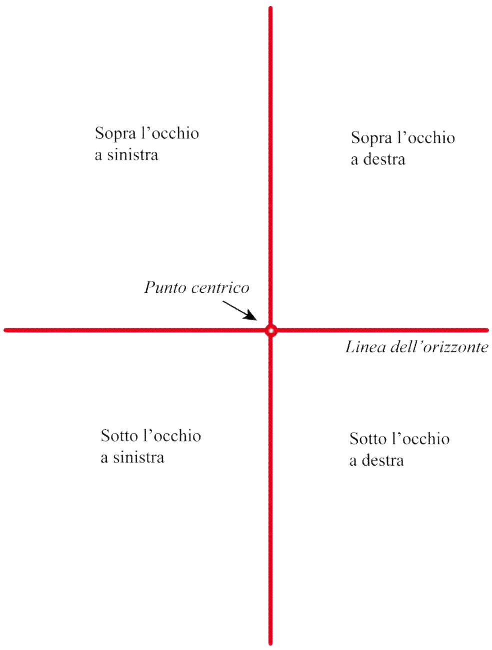
Procediamo anche in questo caso come nel caso precedente: proiettiamo la retta sul piano orizzontale e andiamo a studiare gli angoli α che misurano il suo apparire a destra (o a sinistra):

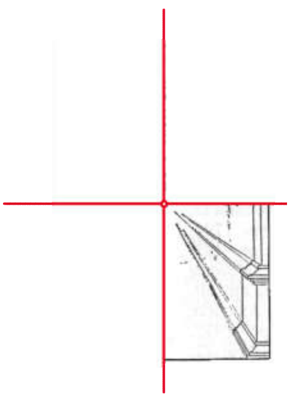




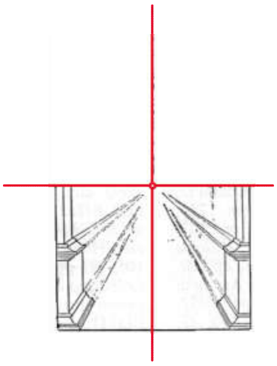
Con la stessa dimostrazione otteniamo il seguente teorema 12 – *Tra i segmenti che si estendono longitudinalmente, quelli a destra sembrano deviare verso sinistra, quelli a sinistra verso destra*.

Questi teoremi hanno conseguenze molto interessanti per il pittore. Consideriamo il caso di un colonnato formato da due file di colonne parallele al piano verticale, una fila a destra e l'altra a sinistra, e cerchiamo di rappresentarlo fedelmente su un quadro. Dividiamo, sul piano del quadro, il campo visivo in quattro zone attraverso due rette perpendicolari, ottenute intersecando il piano verticale e quello orizzontale con il piano del quadro, che supponiamo perpendicolare alla direzione dello sguardo. Le due rette si incontrano in un punto detto *punto di fissazione* o *punto di fuga principale* o anche, con Alberti, *punto centrico*. Questo punto è quello in cui la direzione dello sguardo interseca il piano del quadro. La linea orizzontale si chiama *linea dell'orizzonte* mentre quella verticale, che non è stata presa in considerazione dai pittori rinascimentali, non ha un nome.

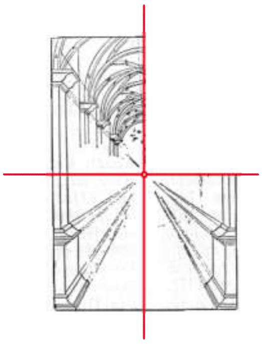




I segmenti, che nella realtà rappresentano le basi delle colonne a destra, sotto l'occhio, sono paralleli al piano orizzontale e quindi si vedono sotto l'occhio a destra e, a mano a mano che si allontanano in profondità, appaiono deviare verso l'alto (teorema 12). Gli stessi segmenti sono anche paralleli al piano verticale, quindi si vedono sotto l'occhio a destra, ma appaiono deviare verso sinistra (teorema 10). Poiché segmenti paralleli appaiono convergenti, essi si vedono convergere al punto centrico (teorema 6).

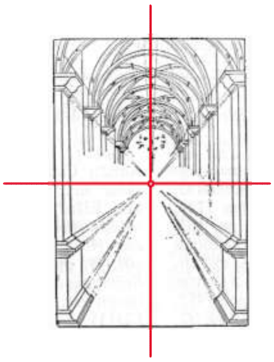


I segmenti, che nella realtà rappresentano le basi delle colonne a sinistra, sono, come i precedenti, paralleli al piano orizzontale e quindi deviano verso l'alto (teorema 12); ma sono anche paralleli al piano verticale e quindi deviano verso destra (teorema 10). Poiché segmenti paralleli appaiono convergenti, essi si vedono convergere al punto centrico (teorema 6).



I segmenti, che nella realtà rappresentano la parte superiore delle colonne a sinistra, sono, come i precedenti, paralleli al piano orizzontale e quindi deviano verso il basso (teorema 12); ma sono anche paralleli al piano verticale e quindi deviano verso destra (teorema 11). Poiché segmenti paralleli appaiono convergenti essi si vedono convergere al punto centrico (teorema 6).

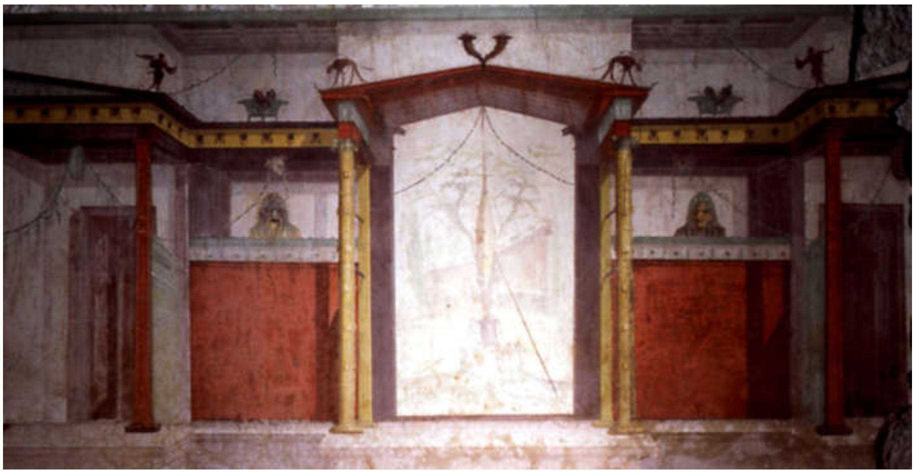
La rappresentazione del colonnato si completa utilizzando i teoremi 12, 11 e 6. Questi teoremi portano alla seguente conclusione: un fascio di rette parallele alla direzione dello sguardo (rette che vengono chiamate *rette di profondità*) essendo parallele sia al piano orizzontale sia a quello verticale si vedono convergere al punto centrico: ad esempio un punto che si muova su una tale retta a destra e sopra l'occhio si vedrà sempre a destra e sopra l'occhio, ma, a mano a mano che il punto si allontana in profondità, si vedrà sempre più in basso e sempre più a sinistra, in una parola, si vedrà avvicinarsi sempre più all'angolo in basso a sinistra.



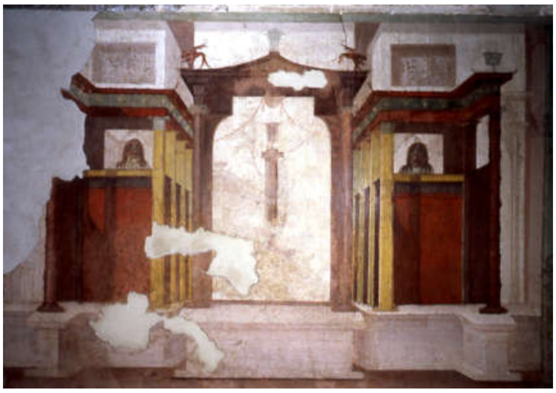
Volendo rappresentare sul quadro il colonnato fedelmente, dovremmo fare in modo che la visione del quadro riproduca la visione della realtà. Mentre nella visione il punto di convergenza delle rette di profondità è un punto virtuale, infinitamente lontano, nel quadro questo punto è ben definito: è il punto di fuga principale. Questo punto è molto importante in questa materia e lo ritroviamo per la prima volta in una bella e poetica espressione di Lucrezio, a dimostrazione di quanto questa teoria fosse nota e utilizzata nell'antichità:

> Un portico benché abbia profilo costante, e appoggi completamente su uguali colonne, se si vede da una parte finale in tutta la sua lunghezza, poco a poco si stringe nella punta di un cono sottile congiungendo tetto e suolo, tutto ciò che sta a destra e a sinistra, fino a terminare nella punta oscura di un cono. (Lucretius, *De rerum natura*, IV, 426-443).

Che queste cognizioni fossero ben presenti nella pittura grecoromana è testimoniato anche da ritrovati archeologici, tra i quali uno tra i più significativi è certamente rappresentato dagli affreschi rinvenuti nel 1961 nella così detta *stanza delle maschere* al Palatino, a Roma. Si tratta di tre pareti affrescate, di grande effetto prospettico.

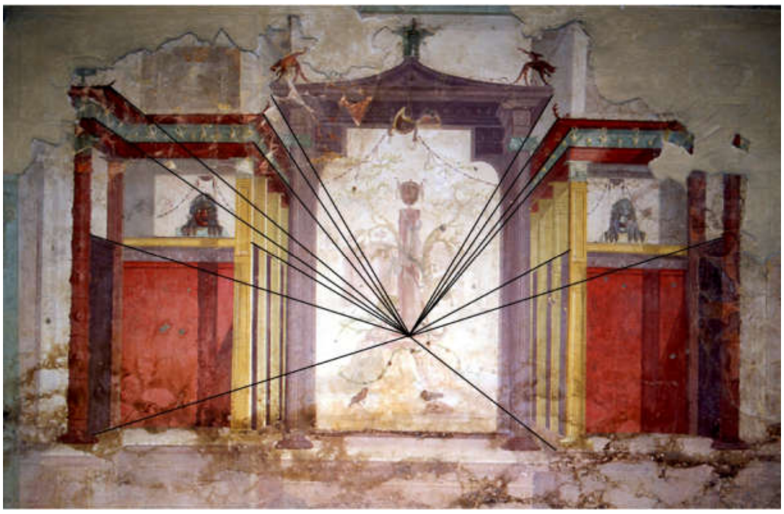


La stanza delle Maschere, parete frontale



La stanza delle Maschere, parete laterale sinistra e parete laterale destra

L'analisi prospettica di questo affresco presenta centinaia di segmenti paralleli che convergono al punto di fuga centrale (Catastini, Ghione 2009).



Riassumendo la teoria euclidea sulla visione della profondità, abbiamo che:

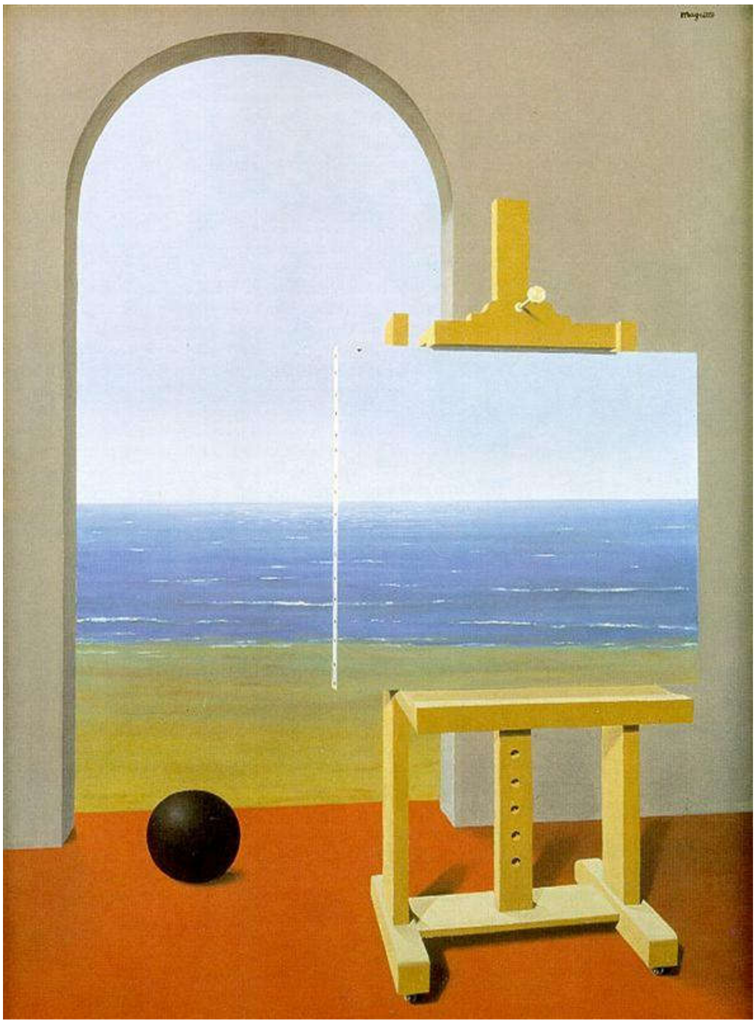
1. segmenti paralleli che si allontanino in profondità dall'occhio, appaiono convergenti;

2. un punto che si allontani dall'occhio in profondità su una retta orizzontale, se è sopra il piano orizzontale (oppure sotto) appare abbassarsi sempre più (oppure alzarsi sempre di più), apparendo, in ogni posizione, sopra (oppure sotto) il piano orizzontale di un angolo β che tende a zero: al limite, quando $\beta=0$, tale punto appare toccare il piano orizzontale;

3. un punto che si allontani dall'occhio in profondità su una retta parallela al piano verticale a destra (oppure a sinistra) appare deviare sempre più a sinistra (oppure a destra), apparendo, in ogni posizione a sinistra (oppure a destra) di un angolo α che tende a zero. Al limite, quando $\alpha=0$, tale punto appare toccare il piano verticale;

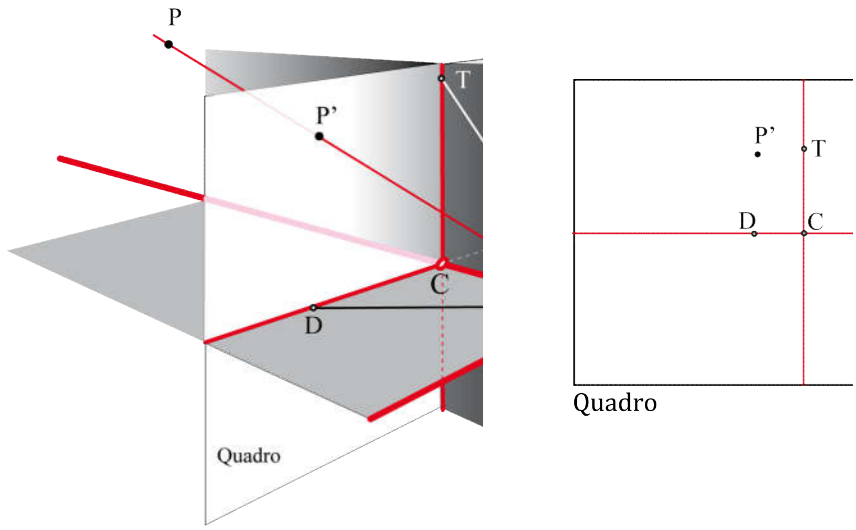
4. rette parallele alla direzione dello sguardo (linee di profondità) appaiono convergenti e, al limite, appaiono toccare sia il piano orizzontale sia quello verticale.

Vediamo ora, con esempi specifici, quali conseguenze possiamo ricavare da questa teoria volendo realizzare su un piano (un quadro o una parete da affrescare) uno scorcio prospettico. Il nostro obiettivo sarà quello di fare in modo che un osservatore che guardi il quadro da un opportuno punto di vista abbia la sensazione di vedere fedelmente l'oggetto rappresentato nelle sue tre dimensioni reali, come se il dipinto fosse su un vetro al di là del quale si svolge la scena rappresentata.



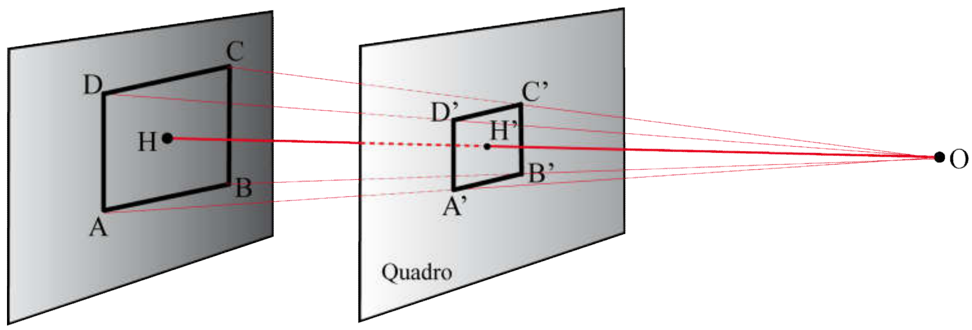
René Magritte, *L’umana condizione*, 1935

Per analizzare in modo più quantitativo la situazione che ci interessa, indichiamo con *d* la distanza dell’occhio dal piano del quadro e organizziamo il campo visivo dividendolo in quattro zone con i piani verticale e orizzontale.



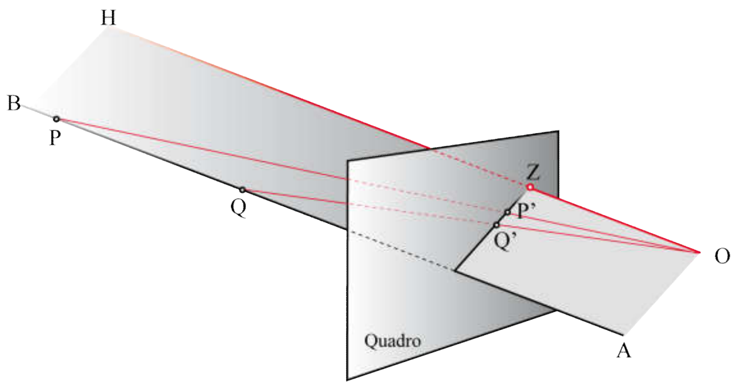
Un punto P dello spazio al di là del piano del quadro si proietta da O in un punto P' sul quadro che è visto da O nella stessa posizione del punto P.

Una figura che si trovi su un piano parallelo al piano del quadro sarà proiettata in una figura simile, dato che la proiezione tra piani paralleli è una similitudine. Trasformazioni di questo tipo conservano il parallelismo e gli angoli e mutano le distanze secondo un determinato rapporto di scala *k* che è uguale al rapporto tra le distanze dei due piani dall'occhio.



I segmenti A'B', B'C', C'D' e D'A' sono paralleli rispettivamente ad AB, BC, CD e DA. Le figure sono in scala secondo il rapporto *k*= OH'/OH

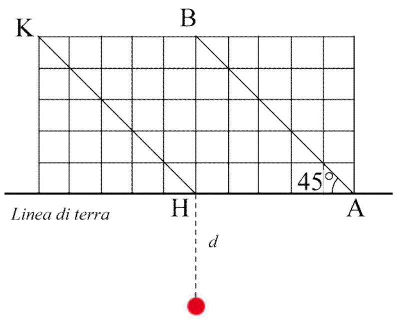
Esploriamo più nel dettaglio le conseguenze, nel campo della pittura, del teorema 6 di Euclide, che tratta il caso che si presenta quando il segmento che si deve proiettare sul piano del quadro si sviluppa in profondità. In questa situazione sappiamo che segmenti paralleli, cioè con una stessa direzione, si trasformano in segmenti che concorrono, sul quadro, verso un ben determinato punto, che si chiama punto di fuga. Ogni direzione ammette un suo punto di fuga che ora vogliamo determinare. Consideriamo una qualsiasi retta AB non parallela al piano del quadro e consideriamo il raggio visivo OH parallelo ad AB. Quando un punto P si allontana dall'occhio lungo la retta AB (quando P è «visto da lontano», dice Euclide) l'angolo tra il raggio visivo OP e il raggio OH tende a zero e l'immagine P' di P sul quadro tende a confondersi con il punto Z, che è raggiunto solo quando P raggiunge, se così si può dire, l'infinito.



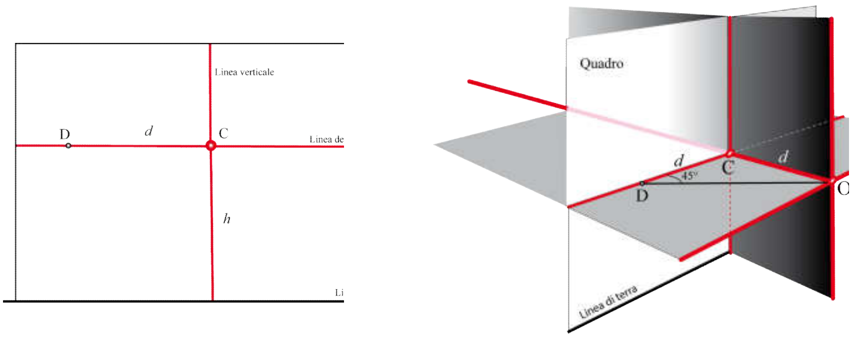
Poiché ogni retta parallela ad AB è anche parallela ad OH, il suo punto di fuga sarà lo stesso punto Z, quindi rette parallele hanno lo stesso punto di fuga Z. Questo è un altro modo per dimostrare il teorema 6 di Euclide il cui enunciato, pur riguardando solo la visione di rette parallele, si riflette su come queste rette si proiettano sul piano del quadro. Il modo che abbiamo descritto per trovare il punto di fuga di un fascio di rette parallele è molto utile e anche di facile applicazione nel disegno prospettico. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1. *Il pavimento albertiano*.

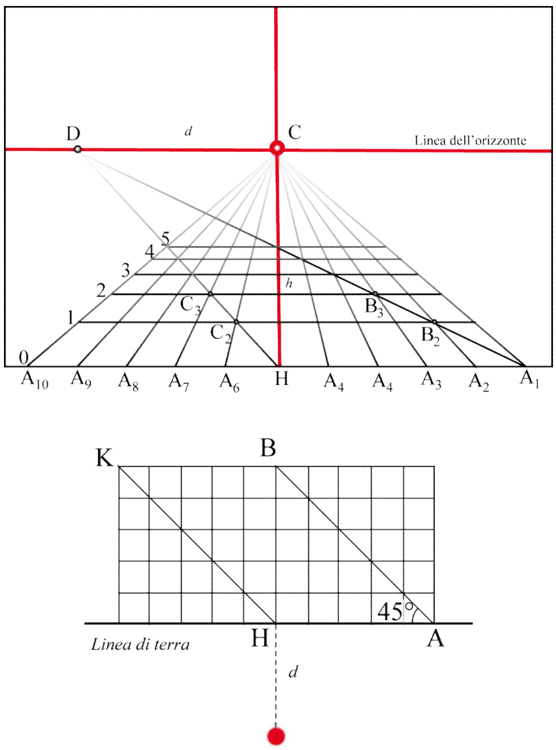
Vogliamo disegnare un pavimento piastrellato con mattonelle quadrate che sia posto su un piano orizzontale a un'altezza *h* sotto l'occhio (in Alberti *h* corrisponde all'altezza di un uomo, misura di ogni cosa, che, immagina, sia in piedi sul pavimento). Supponiamo che la distanza dell'occhio dal quadro sia *d* e che visto dall'alto il pavimento sia disposto, rispetto all'osservatore, perpendicolarmente alla linea dello sguardo. Ecco la pianta del pavimento con la posizione, in rosso, dell'osservatore.



La linea di terra è la linea nella quale il piano del quadro, che si suppone verticale, interseca il pavimento. Per rappresentare prospetticamente questo pavimento, sappiamo già che le linee di profondità hanno come punto di fuga il punto centrico. Oltre a questo, come vedremo, è molto utile disporre dal punto di fuga delle rette parallele alla diagonale AB: tali rette sono inclinate di un angolo di 45 gradi rispetto alla linea di terra. Per trovarlo dobbiamo vedere dove il raggio visivo, inclinato di 45 gradi rispetto alla linea dell'orizzonte sul piano orizzontale, interseca il piano del quadro.



La figura di destra mostra di tale raggio visivo OD la sua intersezione in D con la retta CD dell'orizzonte. Poiché l'angolo è di 45 gradi, abbiamo OC=CD. Nella figura di sinistra abbiamo riportato sul piano del quadro le linee di riferimento, il punto centrico C e il punto di fuga D delle rette orizzontali inclinate di 45 gradi rispetto alla linea di terra. Possiamo ora disegnare il nostro scorcio:



1. Disegniamo i punti A_1, A_2, A_3... H che si trovano sia sulla linea di terra sia sul piano del quadro.

2. Le linee perpendicolari alla linea di terra sono linee di profondità e dunque sono viste convergere verso il punto C.

3. Congiungiamo A_1 con D e intersechiamo questa linea con A_2C, A_3C... e troviamo così i punti B_2, B_3,...

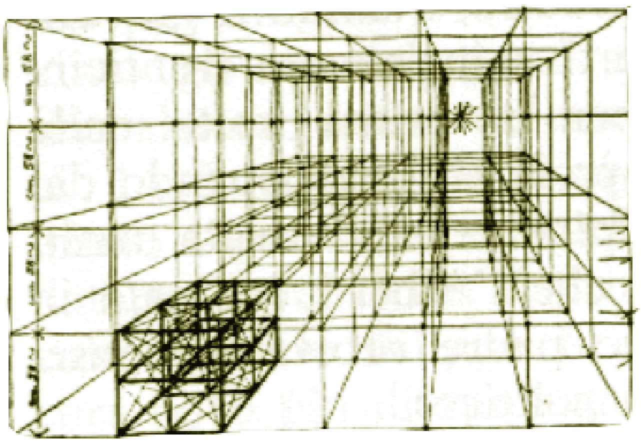
4. Poiché nella pianta la retta AB è parallela a HK, queste due rette si vedono convergere nel punto D.

5. Intersechiamo questa HD con A_6C, A_7C... e troviamo così i punti C_2, C_3...

6. Congiungiamo C_2 con B_2, C_3 con B_3...

Questo metodo è noto come il 'metodo del punto di distanza' proposto da Piero della Francesca. Il punto D prende il nome di *punto di distanza* perché la sua distanza dal punto centrico corrisponde, in scala, alla distanza OC dell'occhio dal piano del quadro. Si poteva realizzare lo scorcio anche in altri modi dal momento che tutte le diagonali, non solo AB o HK, convergono al punto di fuga D. Si poteva anche osservare che le linee 1, 2, 3, 4 e 5 che Alberti chiama *linee trasverse*, essendo parallele al piano del quadro, si proiettano in linee parallele ad AB e quindi conoscendo B_2, B_3

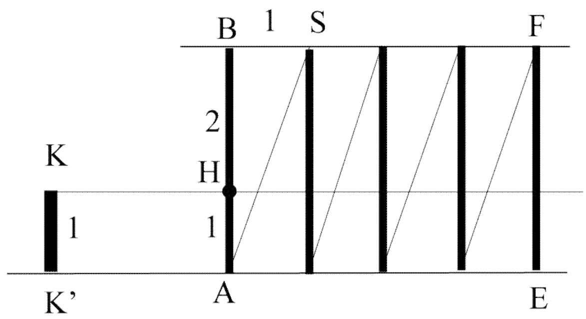
etc. si potevano tracciare le linee trasverse tracciando semplicemente rette parallele alla linea di terra. Leon Battista Alberti indica un metodo, da lui chiamato *modo ottimo*, per disegnare lo scorcio di un pavimento orizzontale. Il piano di terra così quadrettato e disegnato prospetticamente fornisce una griglia 'cartesiana' nella quale poter disegnare in prospettiva la pianta di ciò che si vuole rappresentare. La verticalità è ottenuta facilmente poiché le linee perpendicolari al piano di terra si proiettano in linee perpendicolari alla linea di terra.

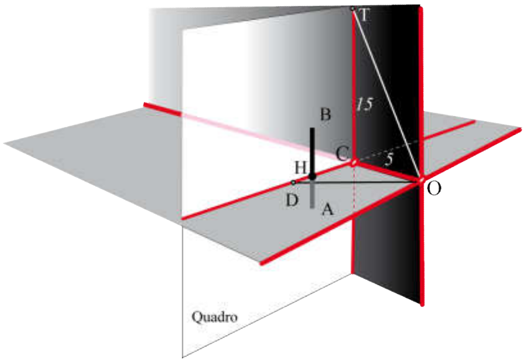


In definitiva Alberti immagina uno spazio astratto, vuoto, descritto a monte con una sorta di linee coordinate, che è rappresentato prospetticamente sul quadro, ed è in questo spazio astratto che l'immagine che il pittore intende proporre trova un dove.

Esempio 2. *Il colonnato*.

Vediamo ora come rappresentare lo scorcio di una fila di colonne parallele al piano verticale, allineate e della stessa altezza, e supponiamo che, fissata un'unità di misura, l'altezza di una colonna sia 3, la distanza tra due di esse 1, che l'occhio che le guarda sia a un'altezza uguale a 1 e che il piano del quadro sia a una distanza di 5 dall'occhio. La figura in alto mostra 5 colonne viste frontalmente. KK' è l'altezza dell'occhio. Le linee AE e BF sono orizzontali parallele al piano verticale e quindi il loro punto di fuga è il punto centrico. Cerchiamo ora il punto di fuga delle rette diagonali parallele ad AS.



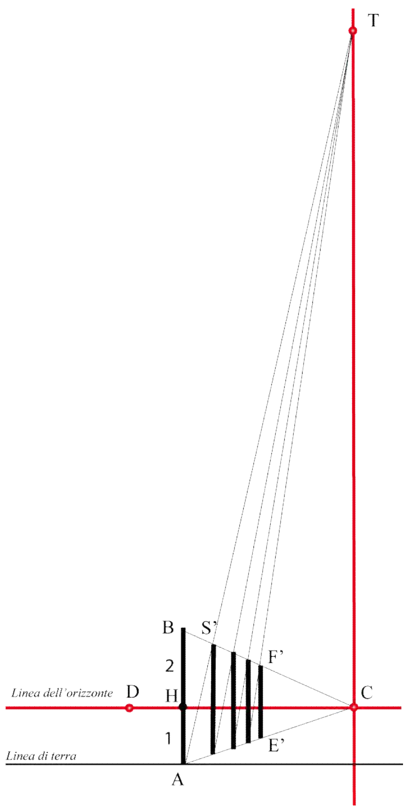


Dobbiamo trovare una retta sul piano verticale passante per il punto O parallela ad AS: poiché AB=3BS e BS=1, abbiamo OC=5BS=5 (perché la distanza dell’occhio dal quadro è 5) e CT=3OC=15 unità (perché il rapporto tra CT e CO deve essere uguale al rapporto tra BA e BS essendo la retta OT parallela a AS).

1. Riportiamo sul piano del quadro la linea di terra e la linea verticale e (in scala) i punti C, D, H, T (DC=5, CT=15, AH=1).

2. La prima colonna AB si trova sul piano del quadro e quindi sarà riportata in scala a partire dal punto H.

3. Poiché le colonne sono parallele al piano verticale e sono tutte della medesima altezza, le linee AE e BF sono linee di profondità e quindi si vedono convergere verso



il punto C. Possiamo quindi disegnare la linea AC, dove si trovano tutte le basi delle 5 colonne, e la linea BC, dove si trovano i capitelli delle 5 colonne.

4. Poiché le linee diagonali sono tutte parallele tra loro e parallele al raggio OT, esse si vedranno convergere al punto di fuga T. Possiamo quindi disegnare la linea AT.

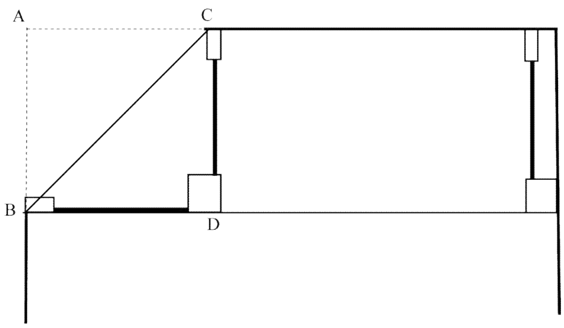
5. La linea AT intersecherà la linea BC nel punto S’ corrispondente al capitello della seconda colonna.

6. Abbassando la verticale da S’ fino a incontrare AC abbiamo la base della seconda colonna.

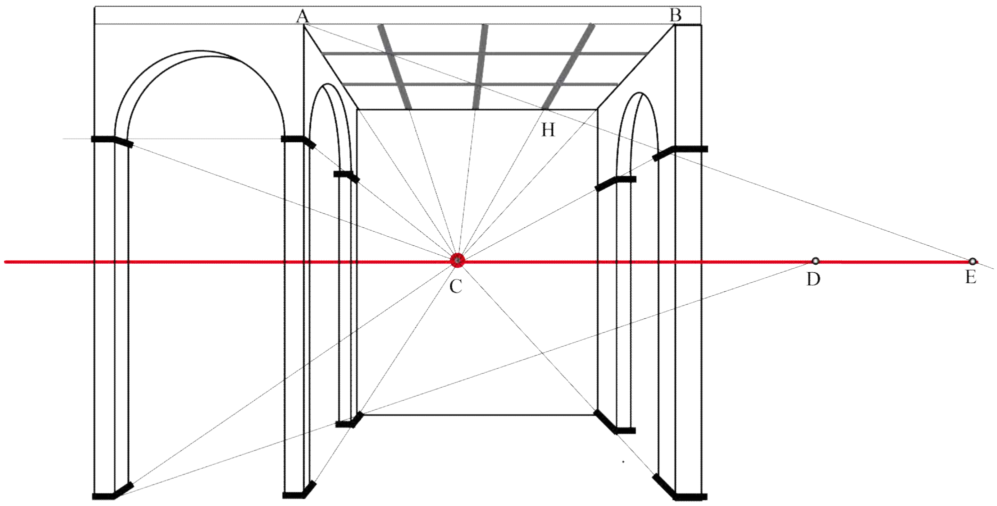
7. Si prosegue nello stesso modo fino ad esaurire il numero di colonne.

Esempio 3. *Il quadro di Duccio da Buoninsegna*.

Come ultimo esempio ricostruiamo in prospettiva la stanza dove si svolge la scena rappresentata nel quadro di Duccio da Buoninsegna *Annuncio della morte della Vergine* che abbiamo citato all’inizio. Come prima cosa ricostruiamo una possibile pianta dell’ambiente.



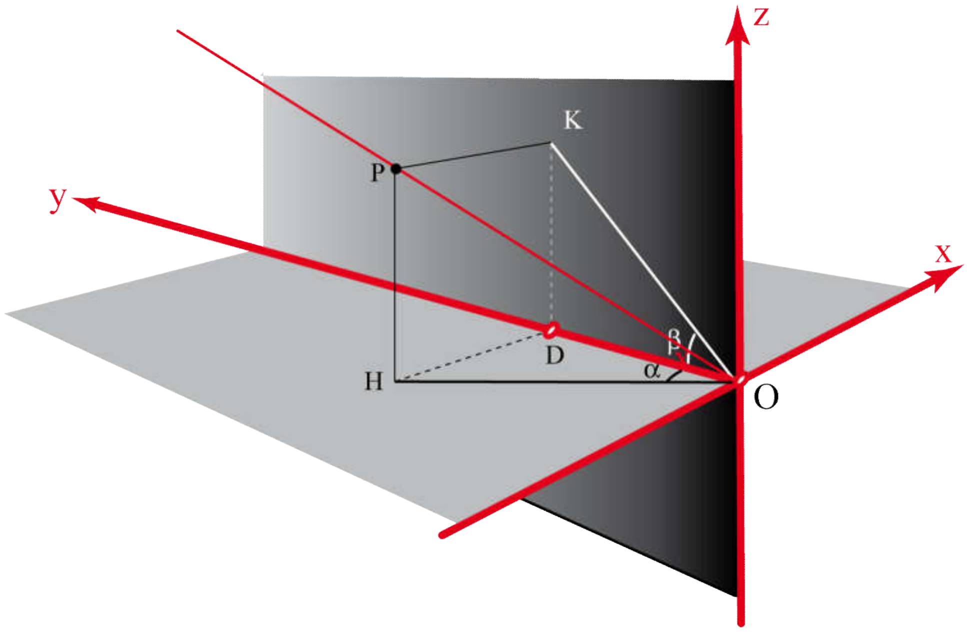
Nella pianta abbiamo supposto uguali i tre archi rappresentati e quindi abbiamo supposto quadrata la stanza ABCD. La linea BC è quindi inclinata di 45 gradi rispetto alla linea di terra e quindi avrà come punto di fuga il punto di distanza D. Tutte le linee sono linee di profondità e quindi si vedranno tutte convergere verso il punto C.



Il punto E è il punto di fuga delle diagonali dei rettangoli che formano il solaio. Per trovarlo abbiamo diviso, seguendo ragionevolmente la rappresentazione di Duccio, il segmento AB in quattro parti uguali e abbiamo unito i punti di suddivisione con il punto C. In questo modo troviamo il punto H che, congiunto con A, fornisce il punto di fuga E: il resto si ottiene seguendo la procedura precedente.

3. La geometria della visione con l'uso delle coordinate cartesiane

Rivediamo ora tutto quello che è stato descritto seguendo l'impianto euclideo in termini sintetici, utilizzando l'algebra e le coordinate cartesiane. Il lettore che non conosca questi metodi può saltare questo paragrafo, che ha lo scopo di mostrare come la geometria della visione che si trova nell'ottica di Euclide possa essere tradotta in termini analitici e per questo essere implementata su un calcolatore. Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane con l'occhio nell'origine e l'asse delle ordinate coincidente con la direzione dello sguardo.



Consideriamo un punto P dello campo visivo, siano (x_0, y_0, z_0) le sue coordinate ($y_0 > 0$) e OP il raggio visivo che coglie il punto P come in figura. Abbiamo

OD=y_0

HD=x_0=y_0 tag(α)

KD=z_0=y_0 tag(β)

e quindi il punto P=(x_0, y_0, z_0) è visto α gradi a destra se α > 0 e $x_0 > 0$ (a sinistra se - α > 0 e $x_0 < 0$) e β gradi in alto se β > 0 e $z_0 > 0$ (in basso se - β > 0 e $z_0 < 0$) dove

$$\tan(\alpha) = \frac{x_0}{y_0} \qquad \text{e} \qquad \tan(\beta) = \frac{z_0}{y_0}$$

Il segno dei due angoli e delle conseguenti coordinate x_0 e z_0 fissano la posizione del punto P nel campo visivo. Poiché il raggio visivo OP ha equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \\ z = z_0 t \end{cases}$$

ogni punto di questo raggio visivo è visto da O secondo gli stessi angoli e quindi nello stesso modo del punto P. Consideriamo ora una retta generica dello spazio e siano

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

le sue equazioni parametriche. Supponiamo che la retta non sia perpendicolare all'asse y, cioè che sia b > 0, così se t tende all'infinito il punto P di questa retta si allontana in profondità dall'occhio e viene visto secondo gli angoli α e β dati dalla relazione

$$\tan(\alpha) = \frac{x_0 + at}{y_0 + bt} \quad , \quad \tan(\beta) = \frac{z_0 + ct}{y_0 + bt}$$

e quindi, quando t tende all'infinito, il punto P della retta viene visto secondo gli angoli dati da

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \quad , \quad \tan(\beta) = \frac{c}{b}$$

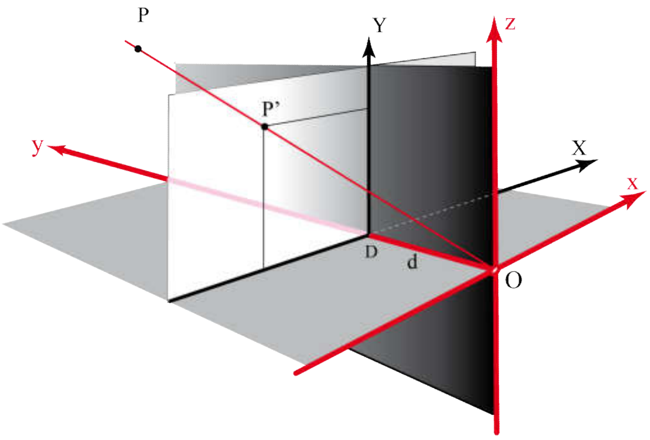
e, poiché due rette parallele hanno gli stessi parametri direttori (a, b, c), questo dimostra che rette parallele sono viste convergere (teorema 6).

Possiamo ora facilmente verificare per via analitica i teoremi 10, 11 e 12 di Euclide. Consideriamo, ad esempio, una retta parallela al piano orizzontale (c=0) e sopra tale piano ($z_0 > 0$). Quando il punto P si allontana in profondità

$$\tan(\beta) = \frac{z_0}{y_0 + bt}$$

diminuisce sempre più e al limite diventa zero: ciò significa che il punto P si vede abbassarsi e al limite si vede confondersi con un punto del piano orizzontale. Ugualmente negli altri casi considerati da Euclide.

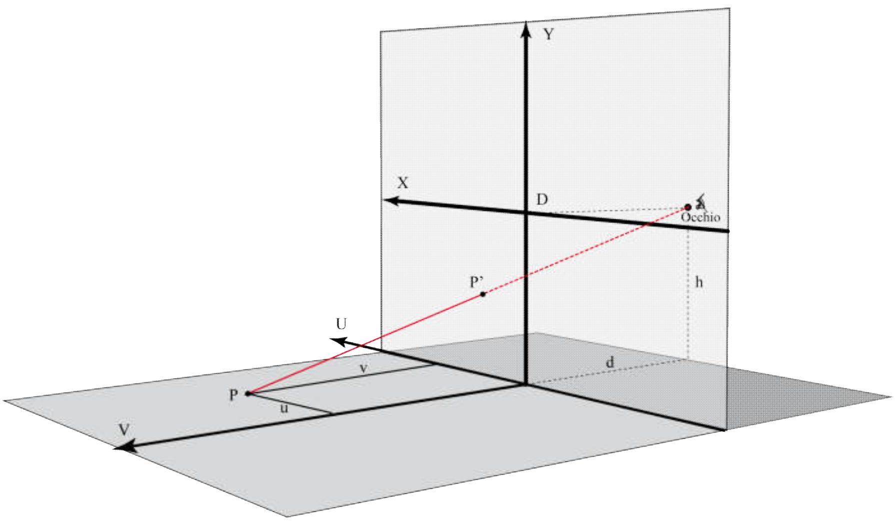
Vediamo ora come si rappresenta lo spazio visivo su un piano perpendicolare alla direzione dello sguardo: il piano del quadro. Sia tale piano il piano di equazione y=*d* (*d* > 0), essendo *d* la distanza del quadro dall'occhio, e fissiamo su tale piano un sistema di riferimento cartesiano con l'origine delle coordinate nel punto D=(0, *d*, 0) e gli assi X e Y come in figura.



Un punto P=(x_0, y_0, z_0) si rappresenta sul piano del quadro con il punto P' di coordinate (X, Y) ottenute trasportando P sul piano y=d lungo il raggio visivo OP: poiché i punti del raggio visivo che contiene P hanno coordinate (tx_0, ty_0, tz_0), quello sul piano del quadro si ottiene per ty_0=d da cui:

$$(1)\quad \begin{cases} X = d\dfrac{x_0}{y_0} \\[2ex] Y = d\dfrac{z_0}{y_0} \end{cases}$$

A titolo di esempio vediamo come viene rappresentato un punto di un piano orizzontale di equazione z=-h. Nell'impianto classico di Alberti e Piero della Francesca, tale piano si interpreta come piano di terra, h come l'altezza dell'occhio e d la distanza dell'occhio dal quadro.



Se P=(u, v-d, -h) sono le coordinate di un punto P di tale piano (nel sistema di riferimento (0, *x*, *y*, *z*), allora la sua proiezione P' sul quadro ha coordinate

$$(2)\quad \begin{cases} X = \dfrac{d\mathrm{u}}{\mathrm{v}\text{-}d} \\ Y = \dfrac{-h}{\mathrm{v}\text{-}d} \end{cases}$$

In particolare, la proiezione è definita per ogni valore v diverso da *d* e se v tende all'infinito lungo la retta di profondità $u=u_0$ la sua immagine sul quadro tende al punto Y=0, X=0, mentre le linee trasverse di equazione $v=v_0$ si trasformano in linee parallele alla retta Y=0 che corrisponde all'orizzonte che, a mano a mano che v_0 aumenta, si alzano avvicinandosi all'orizzonte.

Le equazioni (1) e (2) permettono a un computer di trasferire su un quadro in prospettiva centrale una qualsiasi immagine che sia definita da un insieme (anche molto grande) di punti dei quali sono note le coordinate. Queste banche di dati realizzano in modo molto efficace realtà virtuali (una città, un paesaggio, un grattacelo etc.) che possono in modo automatico essere rappresentate in un'animazione variando i parametri d e h che descrivono la distanza dell'osservatore dalla realtà considerata.