

**Georg Cantor. La filosofia dell'infinito.
Scritti scelti (1884-1888)**

**A cura di Emilio Ferrario e Patrizia Pozzi, Mimesis,
Milano-Udine 2021**

Recensione di
Giovanni Raimo

Emilio Ferrario e Patrizia Pozzi¹, nel volume da loro curato *Georg Cantor. La filosofia dell'infinito. Scritti scelti (1884-1888)*, non solo hanno reso disponibili dei testi di Cantor ancora inediti in Italia e costruito un'antologia in grado di fornire un quadro esaustivo e coerente della riflessione più filosofica del matematico tedesco, ma hanno impreziosito la pubblicazione con due saggi, da loro scritti, che permettono al lettore di orientarsi in un settore della matematica, la teoria del transfinito e in generale la teoria degli insiemi, che rischierebbe, data la complessità del tema, di essere precluso anche al filosofo interessato alla logica e alla filosofia della matematica.

Se il saggio introduttivo di Emilio Ferrario, *Il transfinito e i suoi simboli*, permette al lettore non specialista di avvicinarsi ai concetti indispensabili per la comprensione dei testi presentati nell'antologia, come quelli di *ordinalità*, di *progressione*, di *cardinalità* e di *successione* convergente e non convergente, il saggio conclusivo di Patrizia Pozzi, *I molteplici volti dell'infinito*, allarga la riflessione inserendo il pensiero di Cantor all'interno della storia della filosofia della matematica, partendo dalla nozione di *Ápeiron* di Anassimandro fino ad arrivare al dibattito contemporaneo sul *realismo*

¹ L'autrice ci ha lasciati il 5 gennaio 2021, alla fine di una lunga malattia. Il saggio in postfazione, *I molteplici volti dell'infinito*, è stato il suo ultimo lavoro.

matematico, corrente all'interno della quale si inserirebbe la riflessione cantoriana sull'infinito e il continuo.

Gli scritti raccolti nel volume si propongono di restituire una testimonianza di quel particolare periodo della vita di Georg Cantor che possiamo forse vedere come prevalentemente *speculativo*, e che, a partire dalla prima manifestazione della patologia psichiatrica nella primavera del 1884 fino a tutto il 1888, mostra una certa omogeneità per quanto riguarda l'orientamento culturale e scientifico. Un arco biografico, come ci ricordano i curatori del volume, da non considerarsi affatto involutivo, benché funestato dal manifestarsi della malattia e meno ricco di nuovi esiti matematici rispetto all'eccezionale decennio precedente. In questi anni vediamo Cantor maturare e consolidare le conquiste matematiche e concettuali della stagione precedente, ed evidenziarne le potenzialità transdisciplinari, sia all'interno della matematica stessa che nell'ambito delle matematiche applicate. Contestualmente con l'intensa attività di confronto con il pensiero teologico e filosofico, Cantor sembra inoltre sempre più consapevole della rilevanza che la teoria del transfinito rappresenta per il progresso della matematica, del pensiero scientifico e della cultura in generale.

I testi pubblicati sono i seguenti: *Sui differenti punti di vista in relazione all'infinito attuale* [*Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche*] del 1886, le *Comunicazioni per la dottrina del transfinito* [*Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*], pubblicate tra il 1887 e il 1888, i *Principi di una teoria dei tipi d'ordine. Prima comunicazione* [*Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mitteilung*], scritto tra il 1884 e il 1885 e rimasto inedito fino 1970, e le *Lettere* [*Briefe*], pubblicate da *Springer Verlag* nel 1991.

Tornando al contesto entro il quale questi saggi sono stati pensati, nel maggio del 1884 si manifesta la prima crisi di quella sindrome (maniaco-depressiva, secondo la diagnosi della *Nervenlinik* di Halle) che di lì in poi avrebbe segnato il resto della vita di Cantor. Egli aveva da poco ultimato di

pubblicare il ciclo di saggi *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten* (*Sulle molteplici infinite lineari di punti*), dove si rendeva conto che, per analizzare compiutamente le caratteristiche degli insiemi infiniti di punti era necessario ampliare la matematica al *transfinito*, ossia ad una nozione di infinito come *dominio determinato e attuale*: l'impiego del simbolo ω in luogo del classico ∞ sanciva questo passaggio. Nei mesi successivi Cantor si sottopose a sforzi estenuanti nel tentativo di dimostrare l'ipotesi del continuo, nodo insoluto della sua teoria degli insiemi transfiniti. Sempre nel 1884 sfuma la speranza di essere chiamato a insegnare alla "sua" Università di Berlino, e si intensifica l'opposizione del potente Leopold Kronecker contro la teoria del transfinito.

Nell'autunno 1884, un Cantor stanco, sfiduciato e in rotta con l'ambiente matematico, chiede di essere trasferito alla cattedra di Filosofia. Gli verrà accordato di tenere un seminario su Leibniz all'Università di Halle, il quale però non sarà portato a termine per il progressivo defilarsi degli studenti. È in questo periodo, poi, che inizia a sviluppare con una certa maniacalità la tesi secondo cui il vero autore dei drammi shakespeariani sarebbe il filosofo Francis Bacon, posizione in realtà già popolare nel XIX secolo, e che accompagnerà Cantor per tutti gli anni restanti della sua vita.

Sempre in questo periodo Cantor inizia a studiare le differenti posizioni che i filosofi, dall'antichità fino all'età moderna, hanno sostenuto di fronte al tema dell'infinito, dal punto di vista matematico, metafisico e teologico. Tra la fine del 1884 e l'inizio del 1885 Cantor concepisce uno dei lavori più originali e rilevanti di tutto il periodo compreso tra le *Grundlagen* e i *Beiträge*: i *Principi di una teoria dei tipi d'ordine. Prima comunicazione* [*Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mitteilung*], una "comunicazione" articolata in otto paragrafi redatti in due fasi ravvicinate. Pur trattandosi di una ricerca di carattere essenzialmente matematico, essa è ricca di allusioni transdisciplinari e metafisiche, e in questo senso del tutto inserita nel clima biografico di questi anni.

I primi sei paragrafi della *Erste Mitteilung* (in realtà non vi sarà una seconda comunicazione sui tipi d'ordine) vengono anticipati all'amico matematico e giornalista svedese Gösta Mittag-Leffler, che da qualche anno aveva fondato la rivista "Acta Mathematica", periodico che aveva già promosso una certa diffusione in Europa degli scritti di Cantor. Il 21 febbraio 1885 Cantor invia anche gli ultimi due paragrafi, ma a questo punto Mittag-Leffler, del tutto inaspettatamente, declina la richiesta di Cantor di pubblicare i *Principien*, sostenendo di voler con ciò proteggere l'autore stesso. Quest'opera, scrive Mittag-Leffler, sarebbe infatti "avanti" di almeno duecento anni rispetto ai tempi, e non potrebbe essere recepita dalla comunità matematica, ma avrebbe anzi, con ogni probabilità, generato ulteriore diffidenza verso la sua già controversa figura di matematico. Nella corrispondenza Cantor reagisce con dolore e stizza a questo diniego; l'episodio raffredderà a lungo il loro rapporto di amicizia, e gli rafforzerà la sensazione di isolamento rispetto alla comunità matematica. Il contenuto della *Erste Mitteilung* sarà poi solo parzialmente ripreso nella definitiva formulazione dei *Beiträge* (1895-97).

Torniamo all'innovazione cantoriana nella teoria dei numeri, esposta nelle sue linee principali in modo magistralmente chiaro nel saggio introduttivo di Emilio Ferrario, *Il transfinito e i suoi simboli*. Si è soliti dire che la successione dei numeri interi naturali tende all'infinito, inteso nel mero senso privativo di assenza di un limite finito. Cantor propone di pensare questo limite, seppure non-finito, come una *soglia* oltre la quale si apre un nuovo e inesplorato territorio matematico: il *trans-finito*. Dal punto di vista ordinale questa soglia è ω .

Cantor si pone dunque la seguente domanda: qual è precisamente questo *limite infinito-determinato* cui *tende* la successione non-convergente degli interi naturali? ω è un simbolo che indica quel numero determinato e non-finito che si pone come limite della successione non-convergente dei numeri naturali. È un numero di *nuova specie*, che Cantor chiama numero *transfinito*.

Come osserva Emilio Ferrario «l'introduzione del termine *transfinito* è palese sintomo dell'avversione di Cantor, finanche lessicale, a un *in-finito* inteso nel mero senso privativo di assenza di un limite finito»².

Cantor è ovviamente consapevole di aver costruito un nuovo concetto (quello di numero transfinito), e, in una nota ai §8 e §9 dei *Fondamenti*, riflette con consapevolezza gnoseologica sul processo di formazione dei concetti:

Il corretto processo di formazione dei concetti è a mio avviso sempre il medesimo; si pone un oggetto privo di proprietà, che inizialmente non è che un nome o un segno A, e gli si attribuiscono, secondo un ordine, differenti (in linea di principio infiniti) predicati comprensibili, i cui significati sono noti in virtù di idee già date, e tali da non essere in contraddizione l'un l'altro; mediante ciò vengono definite le relazioni di A con i concetti già noti, in particolare con quelli affini. Una volta ultimato questo, sono avverate tutte le condizioni affinché il concetto A, che sopiva in noi, si risvegli, ed esso è pronto ad entrare nell'esistenza, dotato di quella realtà intrasoggettiva che in generale è quanto si pretende per i concetti. Costatare il suo eventuale significato transiente è poi cosa della metafisica.

Alfred North Whitehead³, pensando proprio ad una nozione come quella di numero transfinito, sosterrà la tesi secondo la quale, ai fini della determinazione contenutistica di un concetto (o *oggetto eterno*, nella terminologia di stampo platonico da lui impiegata), le relazioni che lo connettono con gli altri concetti hanno valenza *costitutiva* e non devono pertanto essere considerate meramente estrinseche.

Come sostiene Ferrario « ω è in prima istanza solo il *segno* per un'intuizione, per un numero che ancora non esiste, ma che è definito in tutto e per tutto come un numero *intero ordinale*. In questa direzione vengono infatti ricercate le sue prime e principali relazioni»⁴. Innanzitutto ω è da riconoscere come il *numero intero ordinale* immediatamente superiore a tutti i numeri della successione naturale 1, 2, 3, ... *v*, ... allo stesso modo in cui il

² E. Ferrario, *Il transfinito e i suoi simboli*, in G. Cantor, *La filosofia dell'infinito*, a cura di E. Ferrario e P. Pozzi, Mimesis, Milano-Udine 2021, pp. 9-32, cit. p. 12.

³ A.N. Whitehead, *Science and the Modern World* (1926), trad. it. di A. Banfi, *La scienza e il mondo moderno*, Bollati Boringhieri, Torino 1979.

⁴ E. Ferrario, *Il transfinito e i suoi simboli*, cit. p. 13.

limite finito = 1 è il primo valore superiore a tutti quelli della successione convergente $1-1/v$.

Il numero ordinale transfinito ω , essendo l'immediato successore della successione infinita degli interi naturali, è per così dire il primo, più semplice e fondamentale *numero transfinito*. Cantor ci invita dunque a pensare l'insieme infinito dei numeri naturali come *attualmente* dato nella sua successione enumerabile fino al suo limite ω . Dunque ω può essere visto sia come il *numero ordinale* della progressione dei numeri interi naturali, come anche di qualsiasi altra progressione a essa simile, data nella sua *attualità*, sia la *forma* di tutte le progressioni *ordinalmente simili* a quella dei numeri interi naturali. È dunque possibile concludere che « ω è un *numero ordinale* e al contempo un tipo, precisamente il *tipo d'ordine enumerativo* o *tipo ordinale* di tutte le *progressioni transfinite semplici*»⁵. La nozione di ω fa dunque convergere il concetto di *numero* e di *tipo*.

Il numero ω , essendo il limite transfinito di una successione non convergente, ha la caratteristica di essere privo di un immediato predecessore. Esso risulta generato da un "atto logico", che Cantor chiama *secondo principio di produzione dei numeri*, del tutto nuovo e differente dal consueto *primo principio*, che produce il successore di qualsivoglia numero mediante aggiunta di una unità.

Guardiamo ora brevemente ai concetti principali della teoria cantoriana dell'infinito. Per il matematico tedesco l'*ordinalità* esprime l'*enumerabilità*, ossia l'ordine di un insieme considerato a prescindere dalla *natura* dei suoi elementi (*prima astrazione fondamentale*), mentre la *cardinalità* di un insieme è quanto si può dire di esso una volta compiuta astrazione sia dalla *natura* degli elementi che dall'*ordine* in cui essi sono dati. Cantor ci mostra però che la cardinalità non corrisponde tanto ad una quantità, quanto più ad una *qualità*: la cardinalità è da intendersi come la qualità che un insieme

⁵ Ivi, p. 14.

condivide con tutti gli altri insiemi con i quali può essere messo in corrispondenza biunivoca.

Tutte le progressioni transfinito della *seconda classe numerica* condividono allora la stessa cardinalità, quella di ω . Il punto è che differenti insiemi transfiniti connotati dalla medesima cardinalità possono essere enumerati diversamente. La cardinalità è cioè un concetto più *astratto*, più *generico*, rispetto a quello di ordinalità. Nelle parole di Ferrarino:

Differenti (infiniti) *tipi d'ordine* e *numeri ordinali* possono essere visti come differenti (infinite) specie di una determinata cardinalità, che di esse è genere. Nel transfinito non ha più senso chiedersi “quanti sono” gli elementi. Nel transfinito il concetto di *cardinalità* perde ogni determinazione *estensiva* e si manifesta nel suo carattere essenzialmente *intensionale*. [...] *L'estensione* e la *dimensione* di un insieme *non giocano alcun ruolo* nel concetto di cardinalità⁶

Cantor introduce poi per la cardinalità degli insiemi transfiniti un nuovo concetto, la *potenza* [*Mächtigkeit*]. Vediamo la sua definizione, data nei *Principi di una teoria dei tipi d'ordine* [*Principien einer Theorie der Ordnungstypen*, § 3, p. 86]:

La potenza di un insieme M è perciò definita come *rappresentazione* [*Vorstellung*] di ciò che è *comune a tutti* gli insiemi *equivalenti* all'insieme M e *soltanto a quello*, e pertanto anche all'insieme M stesso; [...] Essa mi pare costituire pertanto, sia dal punto di vista *psicologico* che *metodologico*, il *più primitivo concetto originario* [*Stamm-begriff*], evinto mediante *astrazione* da tutte le *particolarità* [*Besonderheiten*] che un insieme di una *determinata classe* può presentare, relativamente alla *natura* [*Beschaffenheit*] dei suoi *elementi* e alle *relazioni* [*Beziehungen*] e *ordinamenti* [*Anordnungen*] in cui gli *elementi stanno*, sia *vicendevolmente* che *con gli oggetti esterni all'insieme*. Nel momento in cui si *riflette* soltanto su *ciò che è comune a tutti gli insiemi appartenenti a una medesima classe*, sorge il concetto di *potenza* o *valenza*

Superata la soglia del finito, cardinalità e ordinalità si separano, diventando due aspetti distinti del concetto di numero. Vi sono infatti infiniti numeri ordinali differenti tra loro (e dunque infiniti differenti insiemi ben ordinati) che hanno la medesima potenza, cioè la medesima cardinalità.

⁶ Ivi, pp. 17-18.

Senza entrare ulteriormente nei tecnicismi della teoria del transfinito, introdotti e spiegati dai due curatori nei loro saggi, possiamo attualizzare il pensiero di Cantor dicendo, con le parole di Ferrario, che

La controversia *infinito potenziale-infinito attuale* non mostra più, oggi, alcun carattere di urgenza. Pare ormai tacitamente consolidata la concezione di Cantor secondo cui l'infinito variabile indefinito, potenziale, il "cattivo infinito", è al più un concetto "ausiliario", in sé privo di autonomia logica. È apoditticamente evidente (potremmo dire un *apriori fenomenologico*) che la *variabilità potenziale* di una qualsivoglia grandezza, per essere pensabile, debba necessariamente presupporre una *attualità-substrato* nella quale la variazione possa contestualizzarsi⁷

Per concludere, quello che ci mostrano i saggi raccolti nel volume è che «Nelle riflessioni di Cantor sull'infinito troviamo un respiro unitario che unisce matematica e filosofia»⁸, ossia quanto Cantor sia riuscito a tenere assieme la profondità e la bellezza della filosofia con la capacità di strutturare un nuovo campo della matematica:

Le raffinate e profonde argomentazioni di Cantor ci fanno però respirare le altezze della filosofia perenne. Il *transfinito*, come Cantor amò chiamare il territorio che si estende oltre i limiti del finito, che fino a ieri sembrava dominio inespugnabile dell'indistinzione e del paradosso, ci rivela oggi la sua mirabile gerarchia di ordini e di potenze. Ed è difficile immaginare che questo "paradiso", come ebbe a chiamarlo David Hilbert nella sua celebre prolusione del 1900, sarebbe potuto venire alla luce se Cantor non avesse dimorato in tali altezze⁹.

⁷ Ivi, p. 19.

⁸ P. Pozzi, *I molteplici volti dell'infinito*, in G. Cantor, *La filosofia dell'infinito*, a cura di E. Ferrario e P. Pozzi, Mimesis, Milano-Udine 2021, pp. 111-127, p. 111.

⁹ E. Ferrario, *Il transfinito e i suoi simboli*, cit. p. 31.