nóema
Rivista online di filosofia

ISSN 2239-5474 n. 16 (2025)

doi: 10.54103/2239-5474/29710 Saggi

IL RUOLO CRITICO DEL PENSIERO MATEMATICO NEL PROBLEMA DELL'AUTOFONDAZIONE DELLA RAGIONE

Marco Rigoli

ORCID: 0000-0002-9679-1278

Università degli Studi di Milano (ROR: 00wjc7c48)

Contacts: marco.rigoli55@gmail.com

Abstract

In questo lavoro analizziamo quale ruolo possa avere il pensiero matematico nella critica dell'autofondazione della ragione attraverso la presentazione di una serie di risultati e problemi di carattere matematico. Ad esempio, il passaggio dal Particolare all'Universale, il Tutto e la Parte, la negazione del principio del terzo escluso e l'impossibilità di una scelta, la fallacia dell'evidenza. L'analisi è condotta attraverso la descrizione esplicita di esempi tratti dalla prassi matematica che supportano le nostre conclusioni.

Parole chiave: principio d'induzione, terzo escluso, tutto, parte, evidenza.

Published online: 19/11/2025

Milano University Press

The critical role of mathematical thought in the problem of self-foundation of reasoning

In this work we analize the role of mathematical thought in the critical analisis of the self-foundation of reasoning via the presentation of a number of results and problems of mathematical character. For instance, the path from Particular to Universal, the principle of the excluded middle, the impossibility of a choice and the fallacy of evidence. The investigation is performed through the esplicit description of examples taken from mathematical practice to support our conclusions.

Parole chiave: principle of induction, third excluded, whole, part, evidence.

Più di cinquant'anni fa Guardini[1] ha osservato che uno dei segni impressionanti della fine dell'età moderna è il tramonto della certezza che la ragione possa trovare un fondamento in sé stessa. Che questo fatto sia realmente uno dei segni chiave del tramonto dell'età moderna può essere messo in discussione, ma di certo il problema dei fondamenti della razionalità si pone in tutta la sua forza e complessità. Cerchiamo di spiegare meglio cosa intendiamo con l'affermazione della certezza dell'impossibilità di una autofondazione della ragione.

Come ben mette in risalto Melzi[2], un requisito indispensabile per una possibile autofondazione della ragione è quello che il Melzi chiama "condizione di coerenza interna dei processi razionali". Questa consiste nella certezza che la ragione, muovendo da certe premesse, sia in grado di pervenire a conclusioni univoche in forza di un suo determinismo strutturale. Tale tema si può far risalire agli albori del pensiero occidentale essendo stata una delle speculazioni fondamentali del pensiero classico nella cui cornice trovò soluzione attraverso la ricerca dei canoni univoci dell'evidenza. Il problema, come affermato dal Melzi, potrebbe essere considerato una delle caratterizzazioni dell'evoluzione e della fine del pensiero moderno; fine consistente in una accurata descrizione di come il pensiero occidentale abbia a poco a poco rinunciato a criticare e precisare la condizione di coerenza interna vanificando per essa anche il senso di irrinunciabilità. Ma quale è la relazione tra quest'argomento, che ha da sempre interessato la speculazione filosofica e la Matematica? La risposta è sorprendentemente semplice: la Matematica ed i suoi risultati nella loro univocità interpretativa, ovviamente una volta fissate le regole, costituiscono il terreno fertile su cui sperimentare le nostre ipotesi. In particolare si possono produrre in Matematica alcuni concetti o nozioni, e alcuni risultati ad essi legati, che portano la nostra mente e le relative convinzioni razionali, a vacillare quasi immediatamente al loro confronto. Dunque, anche se spesso non siamo in grado di dare soluzione a specifici problemi in questo ambito, la Matematica ci permette comunque analisi istruttive per futuri approfondimenti.

Ci concentreremo allora nel fornire e commentare un certo numero di esempi, peraltro elementari che costituiranno materiale su cui riflettere e dal quale partire con nuove indagini, insomma con nuove non scontate domande, ad esempio sull'esistenza di certi enti, sulla consistenza delle inferenze logiche che spesso diamo per scontate e così via. Sostanzialmente, come vedremo, il tema ricorrente al quale ci limiteremo è quello dell'infinito anche quando e diremmo più significativamente, il medesimo non sembra comparire nelle nostre consi-

1 R. Guardini, *La fine dell'epoca moderna*, Morcelliana, Brescia, 1960.

2 G. Melzi, *Le idee matematiche del XX secolo*, Borla, Roma, 1983.

derazioni. In particolare, ci risulterà chiaro come il nostro personale concetto di infinito sia sconcertante, poiché alcuni dei suoi aspetti dipendono non solamente dal concetto stesso ma, come ravvisa Melzi[3], dal rapporto tra tale concetto e la mente umana che è costretta a includere sé stessa come oggetto di studio nelle sue analisi relative all'infinito ed alle sue proprietà.

Il problema del passaggio dal particolare all'universale è sempre stato uno tra i temi più affascinanti della speculazione filosofica. Con l'induttivismo, partendo dall'esperienza e dall' osservazione di casi particolari (con ciò intendiamo anche esperienze ed osservazioni che nascono e vivono in ambienti astratti), si giunge a proporre leggi generali che spiegano fenomeni di una data specie realizzando in questo modo il passaggio dal particolare all'universale. Viceversa, identificate le leggi universali, posso prevedere fenomeni futuri deduttivamente, cioè instaurando un ragionamento che, partendo da premesse "accertate" mi conduca a conclusioni altrettanto "accertabili" facendomi questa volta passare dall'universale al particolare. Ad esempio verificando sperimentalmente che sostanze liquide diverse in situazioni diverse, di temperatura, pressione, volume... solidificano sempre a temperature sufficientemente basse, traggo la legge universale che i liquidi solidificano a temperature "basse". Viceversa lasciando un bicchiere d'acqua fuori dalla porta di casa ad Inverness mi aspetto che in una fredda mattina d'inverno l'acqua si trasformi in ghiaccio.

Ben sappiamo che la concezione induttivista della Scienza è stata messa in discussione ripetutamente e tra le critiche più precise e definitive ricordiamo quella, sotta tanti aspetti insuperata, di Hume. Vale a dire non potremo mai affermare, per quelle che Hume chiama *matters of fact* che se ad un evento *a* segue sistematicamente un evento *b*, allora questo deve avvenire anche la prossima volta che si verifica *a*. Questa prima critica toglie ogni carattere di necessita logica al ragionamento di tipo induttivo. Nulla da obiettare, sennonché in realtà una strategia che potremmo chiamare simil-induttiva è praticata sistematicamente – e questo che sia esplicitata o meno – quasi ad ogni livello di orientamento conoscitivo. Ciò costituisce, nell'atteggiamento abituale che abbiamo nei confronti del mondo esterno, una sorta di schema di avanzamento che dà spesso il senso presunto e comunque l'orientamento a quelli che sono i caratteri delle nostre protensioni nell'attesa di ciò che ci aspettiamo avvenga. Soprattutto questo vale per tutto quello che riguarda un atteggiamento che potremmo definire pre-scientifico. Un atteggiamento induttivistico o simil-induttivistico – dove per simil-induttivistico più precisamente intendiamo una versione del ragionamento o del modo di essere che implicitamente fa uso di schemi integralmente o parzialmen-

[3] Ivi, p. 53.

te induttivistici – e quindi presente quasi in ogni atteggiamento che abbiamo nei confronti del mondo e questo implica, *a fortiori*, il riconoscimento che qualcosa come un'osservazione autonoma – nel senso di scevra da ogni precomprensione – è qualcosa di molto chimerico. In fondo, come sottolinea Popper, la teoria – o almeno una teoria implicita – guida sistematicamente l'osservazione. Questo conduce talvolta a risultati completamente inattesi. Prendiamo un esempio molto noto nella storia della scienza: Kepler e Brahe vedono gli stessi fenomeni, ma con occhi diversi, uno li inquadra in prospettiva eliocentrica, l'altro in un'ottica geocentrica. Cosa ne consegue? Che le loro conclusioni non potrebbero essere più diverse. Perveniamo addirittura al dubbio che abbiano visto cose diverse ed in un certo senso è così. D'altra parte, e molto spesso, il "fatto" di vedere cose diverse si manifesta in quasi tutte le esperienze conoscitive. Questa banale osservazione ci permette di afferrare quanto ogni prensione oggettuale, anche una semplice percezione, sia in realtà e spesso implicitamente imbevuta di teoria. Consideriamo ad esempio la percezione di un libro posto su di un tavolo. Quante sovrapposizioni di teorie o di interpretazioni stanno operando e che ci portano a parlare di "libro"? Tutto il cammino per capire la lingua, il contesto, insomma tutto il problema dell'interpretazione. Senza di essa un testo non è che una serie di scarabocchi tracciati su dei fogli. Ciò che precede pone in luce che una riflessione sull'induzione ne implica un'altra – da un punto di vista fenomenologico ancora più rilevante – sul concetto di esperienza in generale e su quanto questa sia poi orientata da schemi di ragionamento che prevedono una forte componente di relazione con elementi che ritroviamo nel pensiero induttivo. Insomma, l'atteggiamento induttivistico – chiamiamolo così – è fortemente connesso ad ogni, o quasi, attività soggettiva di conoscenza o di ricerca della stessa. Possiamo addirittura ritenerla una componente essenziale dell'attitudine naturale che caratterizza il nostro *essere nel mondo* (*In-der-Welt-Sein*). Ed è chiaro che un'analisi di questo tema non investe soltanto la presunta "credibilità" di una scienza empirica, quanto quel sapere ingenuo fatto di attese, aspettative e precomprensioni che ne strutturano o almeno contribuiscono a strutturarne ogni atteggiamento abituale nei confronti del mondo.

Senza entrare in ulteriori e più profonde discussioni sul valore e la correttezza della "scienza induttivista" consideriamo la seguente situazione: supponiamo che una qualche forma del nostro "tempo" sia quantizzata in minuti successivi; t_1 corrisponda al minuto 1, t_2 al minuto 2 e così via. Sia $P(t_i)$ una proprietà che dipenda dal minuto t_i che sto considerando, ad esempio sia p la temperatura della stanza nella quale siamo comodamente seduti. Supponiamo inoltre di aver individuato, in un qualche modo, (ad esempio dopo varie misurazioni), la legge che mi esprime $P(t_i)$ in funzione di t_i. Come posso allora verificare che la mia legge sia corretta? Un possibile modo di procedere è il seguente:

1. Al minuto t_1 verifico che la mia legge è corretta, cioè $P(t_1)$ mi fornisce la corretta temperatura della stanza.
2. Considerato un generico istante tn ed ammessa la correttezza di $P(t_n)$ sono sempre in grado di dimostrare che $P(t_{n+1})$ è corretta.

Allora ne deduco che P(ti) è corretta per ogni minuto t_i.

Diciamolo con le parole di Pascal:

> Benchè questa proposizione abbia un numero infinito di casi, ne darò una dimostrazione molto breve supponendo due Lemmi. Il primo, che è evidente per sé, è che questo rapporto è vero nella seconda base [cioè per n=1]. Il secondo, che se questo rapporto è vero in una base qualsiasi, si ritroverà necessariamente nella base che segue. Da qui si vede che esso sussiste necessariamente in tutte le basi; infatti, si trova nella seconda base per il primo Lemma; dunque per il secondo Lemma si trova nella terza base, dunque nella quarta così via all'infinito[4].

Poincaré in *La Science et l'Hypothèse*[5], è ben consapevole della rilevanza epistemologica di ciò che in Matematica viene chiamato Principio d'Induzione e come afferma Giusti per Poincaré:

> il Principio d'Induzione è un vero giudizio sintetico a priori di tipo Kantiano[…]; esso costituisce un'intuizione diretta dello spirito- anzi- l'affermazione di una proprietà dello spirito stesso". Sostanzialmente esso costituisce una procedura inferenziale insita nella nostra ragione in modo intersoggettivo o meglio è la "codifica" di una naturale ed intersoggettiva inferenza logica[6].

La definizione formale del principio non si discosta molto da quanto descritto da Pascal, ma per precisione diamo la definizione in termini matematici. Sia N= [1, 2, 3…] l'insieme degli interi naturali.

Principio d'Induzione (prima forma). Sia P(n) un enunciato che ha senso in dipendenza dell'intero naturale n. Si supponga che

i) $P(n_0)$ sia vera per un qualche naturale n_0
ii) Per $n \geq n_0$ la validità di P(n) implichi quella di P(n+1)

Allora P(n) è vera per ogni $n \geq n_{0.}$

Dedekind e Peano capiscono che l'essenza stessa del principio d'induzione è insita in N. Ma mentre il primo costruisce in *Essenza e significato dei numeri,*

4 B. Pascal, *Traitè du triangle arithmetique*, Arvensa Editions, Paris, 2019, p. 53.

5 Ivi, pp. 23-24.

6 E. Giusti, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici,* Bollati Boringhieri, Torino, 1999, p. 47.

continuità e numeri irrazionali[7] un modello dei numeri naturali, dimostrando per esso la validità del Principio d'Induzione a partire dalla teoria "ingenua" degli insiemi, il Peano produce una formulazione assiomatica degli interi naturali nel modo seguente (in termini moderni ma equivalente alla definizione originaria): Sia X un insieme non vuoto in cui si fissi un elemento che chiamiamo 1 ed una funzione **+**: X→X. Indicata con a**+** l'immagine di a nella funzione +, a+ si dice successore di a. Si assuma che valgano i seguenti assiomi(di Peano-Dedekind):

j) per ogni a in X, a**+** ≠1
jj) **+** è una funzione iniettiva
jjj) se S è contenuto in X, 1 sta in S e per ogni s in S, s**+** sta in S, allora S=X.

Si introduce, ricorsivamente, una operazione di somma, +, ponendo

$$a+1=a\mathbf{+}$$
$$(a\mathbf{+})+b=(a+b)\mathbf{+}.$$

Il Teorema di ricorsività garantisce che la somma è in questo modo ben definita e da essa si introduce la relazione d'ordine (totale)

$$a<b \text{ se e solo se esiste c in X tale che } b=a+c$$

È facile vedere che il principio d'induzione, poc'anzi enunciato, è (logicamente) equivalente all'assioma jjj)[8]. X è il nostro insieme dei numeri naturali N (in esso si introduce il prodotto in modo opportuno e ritroviamo ciò che abbiamo conosciuto nella nostra infanzia).

Peano dunque comincia a metterci in guardia su quella che abbiamo finora considerato una naturale inferenza logica della nostra ragione. Ma c'è di più. Per cercare di rendere le cose più chiare, facciamo ricorso ad alcuni concetti elementari. Sia X un POSET (*partially ordered set*) cioè X è un Insieme su cui è definita una relazione d'ordine parziale ≤. Vale a dire una relazione binaria che gode delle seguenti proprietà:

1. $\forall x \in X$, $x \leq x$ (proprietà riflessiva).
2. $x \leq y$ e $y \leq x$, implicano $x = y$ (proprietà antisimmetrica).
3. $x \leq y$ e $y \leq z$ implicano $x \leq z$ (proprietà transitiva).

In generale, dati due elementi qualunque x e y di X, non è detto né che $x \leq y$, né che $y \leq x$. Per fare un esempio, prendiamo N con la relazione d'ordine parziale

---

7 R. Dedekind, *Essenza e significato dei numeri, continuità e numeri irrazionali*, Stock, Roma, 1926.

8 Si veda ad esempio F. Dalla Volta, M.Rigoli, *Elementi di Matematica Discreta e Algebra Lineare*, Pearson, Milano, 2007.

$$n \preceq m \text{ se e solo se } n/m$$

dove l'ultimo simbolo significa che n divide m. Sicuramente (N, $\preceq$) e un POSET, ma ne $3 \npreceq 5$, ne $5 \npreceq 3$. In altri termini, gli elementi 3 e 5 non sono confrontabili in (N, $\preceq$).
Diremo che nel POSET (X, $\leq$) vale l'*assioma del buon ordinamento* (d'ora in avanti ABO) se ogni sottoinsieme non vuoto $S \subseteq X$ ammette minimo, cioè se esiste un $\sigma \in S$ tale che $\forall s \in S$, $\sigma \leq s$. Si noti che qualora un minimo σ esista, esso e anche unico per cui si parla del minimo di S. Osserviamo che un POSET (X, $\leq$) per il quale vale ABO, e sempre totalmente ordinato. Ovvero

$$\forall x, y \in X, \text{ o } x \leq y \text{ o } y \leq x.$$

Proveremo ora che la prima forma del principio di induzione su N e equivalente alla validità di ABO su (N, $\leq$). In realtà proveremo anche qualcosa di più; a tale scopo, introduciamo il Principio d' Induzione (II forma)**:** sia $P(n)$ un enunciato che ha senso in dipendenza dell'intero naturale $n \in$ N. Si supponga che:

1. $P(n_0)$ sia vera per qualche $n_0 \in$ N.
2. La validità di $P(t)$ per ogni $n_0 \leq t \leq n$, implica quella di $P(n + 1)$.

Allora l'enunciato $P(n)$ e vero per ogni $n \geq n_0$.
Abbiamo il seguente:

Teorema. Il principio di induzione nella I forma, nella II forma e la validità di ABO in (N, $\leq$) sono tra di loro equivalenti.

Per dimostrare il teorema proveremo la validità della catena di implicazioni seguente:

1. I forma $\longrightarrow$ II forma.
2. II forma $\longrightarrow$ ABO.
3. ABO $\longrightarrow$ I forma.

1. Sia $P(n)$ come nella II forma. Poiché il primo punto delle due forme del principio di induzione coincidono, la prima parte della II forma e verificata. Sia allora $n \geq n_0$ (il caso $n = n_0$ è del tutto ovvio) e si supponga $P(t)$ vera per ogni $n_0 \leq t \leq n$. In particolare $P(n)$ è vera e, dal punto 2 della prima forma, sappiamo che $P(n + 1)$ e vera. Dunque $P(n)$ vale per ogni $n \geq n_0$. Con ciò vale la II forma.
2. Valga la II forma e sia $S \subseteq$ N, $S \neq \emptyset$. Per assurdo S non abbia minimo e si consideri la proposizione:

$$P(n)\text{: nessun intero } t \leq n \text{ sta in } S.$$

Se proviamo che $P(n)$ e vera per ogni $n \geq 1$, allora $S = \emptyset$ ottenendo in tal modo la contraddizione che stiamo cercando. Ora $P(1)$ e vera altrimenti$1 \in S$ e sarebbe sicuramente il suo minimo. Sia ora $n > 1$ e sia $P(t)$ vera per ogni $1 \leq t \leq n$. Si supponga, per contraddizione, che $P(n + 1)$ sia falsa. Allora esiste un qualche $1 \leq t \leq n + 1$ tale che $t \in S$. Se $t < n + 1$allora $1 \leq t \leq n$ e $P(t)$ e vera per cui, nello specifico, $t \notin S$. Deve allora essere $t = n + 1 \in S$ e $n + 1$ e il minimo di S. Contraddizione. Dunque

$P(n + 1)$ è vera e $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$ per la II forma del principio di induzione. Quindi in (N, ≤) vale ABO.

3.Valga ABO in (N, ≤). Sia $P(n)$ come nella I forma e siano soddisfatti i punti 1 e 2 della sua definizione. Dobbiamo verificare che $P(n)$ e vera per ogni $n \geq n_0$. Si consideri l'insieme:

$$S = \{n \geq n_0 : P(n) \text{ è falsa}\} \subseteq \mathrm{N}$$

e per assurdo si supponga $S \neq \emptyset$. Allora, per ABO, esiste $m \in S$, minimo di S. Dunque $P(m)$ e falsa. Ora $m > n_0$ poiché $P(n_0)$ e vera. Del resto $m - 1 \geq n_0$ perché altrimenti m non sarebbe il minimo di S. Ma per il punto 2 della I forma si ha allora che $P(m)$ e vera. Contraddizione.

Attraverso questa serie di nuove strutturazioni ed equivalenze abbiamo ampliato sicuramente la nostra comprensione del principio di induzione. Ad esempio se nella prima forma sembrava dovesse giocare un qualche ruolo l'elemento "successore" che in un certo qual modo attribuiva un aspetto dinamico-temporale al principio, nella seconda forma, come si evince dalla dimostrazione riportata sopra, scompare completamente. Essendo i due equivalenti ne deduciamo che non esiste alcun aspetto dinamico nell'"essenza" del principio. Fondamentale risulta invece la validità dell'assioma del buon ordinamento. Questo mette inoltre in luce il fatto eclatante che quella che finora abbiamo presentato come la "codifica" di una intersoggettiva inferenza logica, si esprime attraverso la validità di un assioma, ABO, goduto dagli interi naturali rispetto al loro ordinamento canonico. E questa validità è dovuta alla nostra costruzione dei naturali che non ha a che fare con una nostra azione raziocinante definita a priori ma dipende solo ad una nostra scelta. Osserviamo che, in generale, ABO è falso per relazioni d'ordine qualunque. Ad esempio consideriamo il campo ordinato **Q** dei razionali con il suo usuale ordinamento. L'insieme A, sottoinsieme di **Q**, definito da

A= [p/q in **Q** positivi e tali che p^2/q^2 ≥2]

è non vuoto e non ha minimo. Altro che "giudizio sintetico a priori di tipo Kantiano"!

Ma la seconda forma del Principio d'Induzione ci mostra anche un secondo fatto estremamente importante. Supponiamo che (I, ≤) sia un insieme di indici bene ordinato, valga cioè in esso ABO. Possiamo pensare ad un principio di induzione dove l'enunciato P dipenda dagli "indici" i in I. Bene la seconda forma del Principio d'Induzione è quella che "mutatis mutandis" si estende a questa situazione prendendo il nome di Principio d'Induzione Transfinita.

Il prossimo esempio mostra come la Matematica possa individuare e scardinare preconcetti. Il motto, elevato a postulato da Euclide, "il tutto è maggiore della parte" (non nel senso della teoria della Gastalt, cioè non il tutto è maggiore della somma delle sue parti) ha prodotto varie ed apparenti contraddizioni. Famoso è il paradosso di Galileo che osserva che ci sono tanti quadrati di interi quanti questi ultimi. Tuttavia l'insieme formato dai primi è propriamente contenuto negli interi naturali. Difficoltà di questo genere (famosa è anche la sua analisi del paradosso della ruota che la tradizione -con dubbia paternità- fa risalire ad Aristotele) nel cercare di trattare dell'infinito in atto fecero concludere a Galileo che queste sono difficoltà che provengono dal discorrere che noi facciamo con il nostro intelletto finito intorno all'infinito, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite; il che penso che non sia conveniente. Eppure Galileo nell'osservare che ci sono tanti interi quanti i loro quadrati" era vicinissimo alla soluzione dell'apparente paradosso. Fu poi G. Cantor che riconoscendo che il concetto di ugual numero di elementi "ottenuto" attraverso la determinazione di una corrispondenza biunivoca tra due insiemi nulla aveva a che fare con la relazione d'ordine indotta dall'inclusione insiemistica. L'enumerazione degli elementi di un insieme ci porta, nel caso finito, all'uguaglianza ma la "tensione" del concetto di enumerazione nel caso infinito semplicemente non conserva questa proprietà. In quest'ordine di idee scaturisce anche la definizione di insieme finito, cioè per il quale è possibile enumerare i suoi elementi fino ad esaurirlo (si noti che questa non è la definizione matematica di insieme finito nel senso del contare ma una πcontrapposto quella di insieme infinito quando ciò non è possibile. In quanto segue chiameremo quest'ultima definizione "naif". Il salto concettuale è compiuto da Dedekind con la seguente definizione: *Un insieme A si dice infinito se si può porre in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria e finito altrimenti.* In questa definizione si individuano due punti salienti: il primo è il riconoscimento che il fatto riportato nella definizione non ha nulla di paradossale; il secondo è che dalla definizione di insieme finito è stato tolto ogni riferimento all'azione del contare, processo tipicamente legato agli interi naturali.

Ma questa definizione, che diremo di Dedekind per distinguerla dalla precedente, deve però recuperare la nostra idea "naif" iniziale… E così è, pur di accettare (il controverso) l'assioma della scelta. Precisamene la definizione "naif" e quella di Dedekind sono equivalenti pur di ammettere l'assioma della scelta. Per inciso, e riferendoci al principio di Induzione Transfinita, l'assioma della scelta è equivalente alla validità del Teorema del buon ordinamento (o di Zermelo) che ci permette di garantire l'esistenza di un buon ordinamento su qualsiasi insieme permettendoci in questo modo la possibilità di utilizzare l'Induzione Transfinita.

Da un punto di vista epistemologico abbiamo teso la nozione iniziale di insieme infinito "al punto di rottura" che ci ha permesso di introdurne una nuova in una forma concettualmente più profonda anche se meno intuitiva.

Nel prossimo terzo esempio mostriamo come sia possibile introdurre in modo logicamente corretto la definizione di un oggetto matematico, in questo caso un numero reale, senza poter dire nulla a suo riguardo a parte (ammettendo il principio del terzo escluso) la sua esistenza. L'esempio che proponiamo è dovuto a Brouwer. Consideriamo il numero reale π. Nel 1761, Lambert ha dimostrato che π è irrazionale e dunque nello sviluppo decimale di π=3,1415926… non c'è alcun gruppo di cifre alla destra della virgola che si ripeta periodicamente. Fissato ad esempio il traguardo di voler scrivere un milione di cifre decimali possiamo, a tale scopo, considerare una serie convergente a (un multiplo di) π, quale ad esempio la serie (storica) di Leibniz-Gregory (ma meglio sarebbe una serie velocemente convergente come quella di Bailey, Borwein e Plouffe[9] e calcolare una sufficientemente grande somma parziale per ottenere risposta al nostro quesito. Brouwer ci suggerisce di costruire un nuovo numero reale π^ nel modo seguente:

i) La parte intera di π^ è 3
ii) Per quella decimale procediamo nel modo seguente: se incontriamo una successione di cento o più zeri consecutivi dopo un certo numero n di cifre nella rappresentazione decimale di π,
   a) se n è pari sostituiamo la cifra r di posto n-1 con r-1
   b) se n è dispari sostituiamo il primo 0 che è al posto n con 1.
iii) Se non c'è alcuna successione di cento o più zeri consecutivi poniamo π^=π.

Ora π^ è perfettamente logicamente definito, il problema è che non abbiamo alcun modo di decidere tra le tre possibilità che si presentano mutualmente esclusive. Non essendoci data la possibilità di conoscere *in toto* lo sviluppo decimale di π, cioè come infinità in atto, qualsiasi procedimento che ci permette di calcolare le successive cifre decimali di π non ci permette di rispondere al problema: se non trovo in un lasso di tempo finito una successione di cento o più zeri successivi, non è detto che non la troverò in futuro o non la troverò del tutto.

[9] D. Bailey, P. Borwein, S. Plouffe, *On the rapid computation of various polylogarithmic constants*, in «Math. Comp». 66, 997, pp. 903–913.

Per meglio afferrare una delle conseguenze della negazione del principio del terzo escluso partiamo da un dato che sembra laterale, ma che in realtà ci pone proprio all'interno della difficoltà. Consideriamo la congettura di Goldbach per la quale ogni intero pari maggiore di due si può scrivere come somma di due primi. Vale a dire

$$\forall n \geq 2 \text{ esistono } p, q \in \mathrm{N} \text{ primi tali che:} 2n = p + q.$$

Ad ora non conosciamo una dimostrazione di tale fatto e neppure conosciamo un controesempio.

Se accettiamo la validità del principio del terzo escluso deduciamo la validità della seguente:

Osservazione. *O tutti i pari più grandi di 2 si possono scrivere come somma di due primi oppure esiste almeno un numero pari più grande di 2 per il quale l'asserzione precedente e falsa.*

Dunque: o partendo dalla proprietà di un intero maggiore di 2 di essere pari possiamo dimostrare che è scrivibile come somma di due primi; o esiste, diciamo, un procedimento di calcolo che ci permette di costruire un controesempio.
È inoltre chiaro che per un numero finito di interi pari fissato (non genericamente) una diretta verifica ci porta sempre a stabilire se o meno per essi valga la congettura di Goldbach. Ma è altrettanto ovvio che ciò non si estende agli interi pari nella loro totalità.

Per Brouwer e con lui per Heyting, Borel, Poincaré e, in un periodo iniziale, anche Weyl dobbiamo fondare la matematica su procedimenti costruttivi. Ad esempio la validità dell'algoritmo euclideo che prova l'esistenza del MCD tra due interi naturali si basa su un procedimento costruttivo. Il principio del terzo escluso è un cardine della matematica classica nella quale viene utilizzato di continuo. Possiamo sostituirlo facilmente e, per così dire, senza colpo ferire, con un processo costruttivo?

Vediamo, con un esempio, se da un'argomentazione classica è possibile ricavare un procedimento costruttivo.

Ricordiamo che un punto $p \in \mathbf{R}$, l'insieme dei numeri reali, si dice *punto di accumulazione* di un insieme $S \subseteq \mathbf{R}$ se per ogni intervallo di p privato del punto p, $(p-\varepsilon, p+\varepsilon) /\{p\}$ con $\varepsilon > 0$, si verifica che $S \cap (p-\varepsilon, p+\varepsilon) /\{p\} \neq \emptyset$. L'insieme $S \subseteq \mathbf{R}$ si dice *limitato* se esistono $s_1, s_2 \in \mathbf{R}$ tali che $\forall s \in S, s_1 \leq s \leq s_2$.

Un classico risultato di B. Bolzano e K.Weierstrass afferma:

Teorema (di Bolzano-Weierstrass)**.** *Sia $S \subseteq$ **R** un insieme infinito limitato. Allora S possiede almeno un punto di accumulazione.*

Osservazione. Il punto di accumulazione può o meno appartenere ad S.

Il teorema di Bolzano-Weierstrass è conseguenza del seguente:

Lemma (degli intervalli inscatolati)**.** *Sia $I_n = [a_n, b_n] \subseteq$ **R**, $\{I_n\}$ una successione di intervalli (la notazione indica che contengono gli estremi) tale che $I_n+1 \subseteq I_n$, $\forall n$ e $|b_n - a_n| \to 0$ per $n \to +\infty$. Allora l'intersezione degli I_n non è vuota.*

Il lemma si basa sulla possibilità di costruire una successione di Cauchy e di utilizzare la completezza di **R** per provarne la convergenza.

Dimostrazione del teorema. Siano s_1 e $s_2 \in$ **R** tali che $s_1 \leq s \leq s_2$ $\forall s \in S$. Definiamo $s_3 = 1/2(s_1+s_2)$. Allora l'affermazione "nell'intervallo $[s_1, s_3]$ giacciono infiniti punti di S" è o vera o falsa. Se è falsa ne segue che in $[s_3, s_2]$ giacciono infiniti punti di S. Nel primo caso sia $I_1 = [s_1, s_3]$, nel secondo caso sia $I_1 = [s_3, s_2]$. Sia s_4 il punto medio di I_1 (che potrebbe essere o $1/2\ (s_1 + s_3)$ o $1/2\ (s_3 + s_2)$). Il punto s_4 divide I_1 in due intervalli e poiché $I_1 \cap S$ ha infiniti elementi applichiamo il ragionamento precedente per determinare un intervallo I_2 contenuto in I_1 con $I_2 \cap S$ con infiniti elementi. In tal modo nasce una successione In che si vede immediatamente soddisfare le ipotesi del lemma. Sia allora p nell'intersezione di tutti gli I_n. È immediato riconoscere che p e un punto di accumulazione per S.

Chiaramente stiamo qui usando il principio del terzo escluso per un insieme infinito. Ma e possibile dare al precedente ragionamento una forma costruttiva?

Quello che dobbiamo fare è sostanzialmente stabilire un criterio di scelta per gli intervalli I_n. Ci sono casi in cui il sottoinsieme $S \subseteq$ **R** limitato non ci permette di farlo. Costruiamo un tale S e, a questo scopo, diciamo numero di Goldbach un intero $n \geq 2$ tale che $2n$ si può scrivere come somma di due primi. Sia inoltre r_v, $v = 1, 2, \ldots$ la successione dei razionali in $[0, 1)$ ordinati nel modo seguente:

razionale rv:	0,	1/2,	1/3,	2/3,	1/4,	3/4,	1/5,	2/5,	3/5,	4/5,	1/6…
naturale v:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11...

Ad esempio $r_8 = 2/5$, $r_{11} = 1/6$, … e così via. Volendo esplicitare ulteriormente ciò che abbiamo fatto, si noti che i razionali della prima riga sopra p/q e p'/q', con p, q e p', q' primi tra loro, vengono ordinati secondo la relazione

$$p/q \leq p'/q' \text{ se e solo se } o\ q < q' o\ q = q' \text{ e } p \leq p'$$

alla quale poi corrisponde l'assegnazione del naturale v sulla seconda riga. Definiamo ora S come la successione a_n siffatta:

$$a_n = 2 - 1/n \text{ se } n = 1\ o\ \forall v \leq n,\ v \text{ e un numero di Goldbach,}$$
$$\text{oppure}$$
$$a_n = r_n \text{ in caso contrario.}$$

Si noti che se la congettura di Goldbach fosse vera allora $a_n = 2 - 1/n\ \forall n$ ed $S \subseteq [1, 2)$. Se però la congettura di Goldbach fosse falsa e $2N$ è il più piccolo pari con $N \geq 2$ che non si può esprimere come somma di due primi allora $a_n = 2 - 1/n\ \forall n < N$ e $a_n = r_n\ \forall n \geq N$. Dunque $S \subseteq [0, 2]$ con al più un numero finito di elementi in $[1, 2)$.

Come troviamo ora gli intervalli della dimostrazione del teorema di Weierstrass?

Si ha $0 < a_n \leq 2$ dunque $s_1 = 0$ e $s_2 = 2$, allora $s_3 = 1$. Quindi o in $[0, 1]$ oppure in $[1, 2]$ stanno infiniti punti della successione $\{a_n\}$ cioè di S. Ciò però non si può decidere allo stato attuale delle cose; se la congettura di Goldbach fosse vera dobbiamo scegliere $I_1 = [1, 2]$, se falsa $I_1 = [0, 1]$. L' intersezione degli intervalli non può quindi essere assegnata *oggettivamente* per $S = \{a_n\}$. Si noti che se la congettura di Goldbach fosse vera, il punto 2 sarebbe un punto di accumulazione per S. Se invece la congettura fosse falsa, allora ogni punto di $[0, 1]$ sarebbe di accumulazione per S perché tale proprietà vale per la successione $\{r_n\}$, che differisce da S solo per un numero finito di termini.

La dimostrazione del teorema di Weierstrass (ammesso rimanga ancora vero se escludiamo la validità del principio del terzo escluso) deve essere ristabilita ex-novo in termini "costruttivi".

Per concludere la mancanza del principio del terzo escluso ci preclude una possibilità di scelta. Rinunciando ad utilizzare il terzo escluso, un elemento logico estremamente potente, abbiamo avuto una penalizzazione molto forte sulla possibilità di dar esistenza a oggetti matematici. L'accettazione di nuovi oggetti matematici non risulta dunque sempre possibile e, soprattutto, qualora esistano comunque percorsi costruttivi, ci aspettiamo che essi siano spesso molto più involuti. Quindi vi è sicuramente una perdita, per così dire, in termini *economici*. Ma questo, fondamentalmente, è un fatto marginale interno allo sviluppo del pensiero matematico. Pensiamo invece che un'operazione del genere abbia molto a che vedere con una posizione epistemologica proprio nei termini di una teoria della conoscenza – che può essere implicita o esplicita – ma che comunque agisce nella ricerca del matematico. Una riflessione filosofica dovrebbe coglierne il significato soprattutto in relazione, alla costituzione di una teoria della conoscenza. Nel senso che, rinunciare al terzo escluso nel caso di insiemi infiniti, è legato a doppio filo con l'ammettere solo dimostrazioni di carattere costruttivo, ma ciò può essere filosoficamente criticabile. In effetti, qual è l'alveo dei *desiderata* da parte del matematico che riconosce diritto di cittadinanza a sole procedure costruttive?

In primo luogo, e fermiamoci a questo che sembra tra i più importanti, questi *desiderata* riguardano lo statuto che deve avere l'oggetto matematico che, in questa prospettiva, ha senso e valore solo allorché si propone, al termine della realizzazione del progetto costruttivo, in modo *ostensivo*. L'oggetto in questione deve proprio, al termine di una qualche progettualità, darsi, *ostensivamente in carne ed ossa*. Su questo tema la fenomenologia può dirci qualcosa a proposito di cosa sia effettivamente "conoscere un oggetto". L'oggetto è inteso come posto di fronte a noi nel caso di un oggetto mondano – non so, il tavolo su cui sono appoggiato – o invece in quella sorta di pienezza ed *ostensione* ideale – che chiameremo pienezza *noematica* – qualora si tratti di un oggetto ideale, di principio passibile di essere intenzionato dalla nostra coscienza. Ed il modello sotteso, quello che indica cosa si intende per prensione adeguata dell'oggetto, e quello dato dalla percezione sensibile. Ma c'è una cosa che passa sotto silenzio: in realtà la percezione oggettuale non è mai completamente *ostensiva*. La *datità ostensiva* e completa è una sorta di idea kantiana, non si realizza mai. La percezione ci offre sempre una faccia alla volta dell'oggetto, in un certo momento e contesto, mentre è la *somma aperta o risultante* delle percezioni parziali che ci dà l'oggetto. La percezione anche la più *luminosa* che possa esserci, la più "offerente" risulta sempre in via di saturazione e non ci consegna mai l'oggetto nella sua totalità. In fondo questo *desiderata* per cui l'oggetto ideale debba darsi nella sua totale *ostensione* indica chiaramente un'idealizzazione. Ciò non impedisce che l'oggetto si offra in evidenza, solo che questa prende forme mediate in un percorso temporalmente strutturato. Questa posizione potrebbe portarci a ritenere che un risultato di pura esistenza sia poco più che inutile.

Consideriamo ora un esempio per vedere se le cose stanno proprio così o, almeno, se sia possibile presentare qualche dubbio sulla liceità di questo atteggiamento così *minimalista*.

Gauss, motivato da certe considerazioni sperimentali basate sulle tavole dei numeri primi allora esistenti (e alle quali egli stesso lavorò per molti anni come passatempo), introdusse quello che in termini moderni viene chiamato il *logaritmo integrale di n*, *li*(*n*), vale a dire la funzione aritmetica li(n) definita come l'integrale da 2 a n di 1/log(t) e congetturò la validità del seguente risultato:

$$\lim_{n\to+\infty} \pi(n)/li(n)= 1$$

dove $\pi(n)$ è il numero dei primi compresi tra 2 ed n. Questo risultato, che prende il nome di *Teorema dei numeri primi*, venne dimostrato indipendentemente e quasi contemporaneamente molto più tardi nel 1896 da J. Hadamard e C. de la Vallee Poussin. Entrambi basano la loro dimostrazione sulla funzione ζ di Riemann. Ma al solito i matematici risolto un problema vogliono qualcosa di più ed in questo caso si tratta di stabilire come si comporta la differenza:

$$\pi(n) - li(n)$$

per n grande. La risoluzione della congettura di Riemann per la funzione ζ implicherebbe che

$$\pi(x) - li(x)/x^{1/2+\alpha} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty, \forall\alpha > 0.$$

tuttavia la congettura di Riemann non è stata tuttora né provata né contraddetta. In effetti il miglior risultato ad oggi disponibile è:

$$\pi(x) - li(x)/x^{1/2} \log x= O\ (1) \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Per molto tempo si è creduto che

$$\pi(x) < li(x)$$

essendo questo fatto validato dalla tavola dei numeri primi per $x < 10^8$, la disuguaglianza è stata poi confermata per $x < 10^{18}$ da Buthe nel 2015[10].

Ed e proprio a questo punto che un teorema di Littlewood del 1914[11] ha un effetto in qualche modo dirompente. Infatti, Littlelwood ha dimostrato che esistono infiniti interi naturali x per i quali:

$$\pi(x) - li(x) > x^{1/2}/2 \log x;$$

ed infiniti naturali x per i quali:

$$\pi(x) - li(x) < -x^{1/2} /2 \log x.$$

Non si conosce ad oggi il più piccolo intero y per il quale valga una delle due precedenti disuguaglianze. Sappiamo però[12] che deve esistere un qualche

10 J. Buthe, *On the first sign change in Mertens' theorem,* in «Acta arithmetica», 171, 2015, pp. 183–195).

11 J.E. Littlewood, *Sur la distribution des nombres premiers,* in «*Comptes* Rendus del'Academie Scientifique de Paris», 158, 1914, pp. 1869–1872.

12 Cfr. S. Zegowitz, *On the positive region of* $\pi(x)-li(x)$, Master thesis, Manchester Institute for

$$x < e^{7279513468}$$

per cui

$$\pi(x) - li(x) > 0$$

Ricordiamo che questi *interi* vengono abitualmente chiamati interi di Skewes, da Skewes, studente di Littlewood, che pubblicò i propri unici due articoli su questa questione[13].Uno tra gli ultimi risultati più importanti in questa direzione è dovuto a Saouter e Demichel[14] per il quale esiste un x come sopra con

$$x < 1{,}397162914 \times 10^{316}$$

Possiamo a questo punto affermare che il risultato sia un semplice risultato di pura esistenza che, in fondo, lascia il tempo che trova? Non abbiamo imparato nulla di effettivo? Non abbiamo comunque aumentato la nostra conoscenza?

Risulta evidente che non abbiamo l'oggetto voluto, ma di fatto abbiamo una serie di nuove conoscenze e di ipotesi di lavoro, di cui prima semplicemente non disponevamo. Abbiamo imparato qualcosa su ciò che sta attorno al nostro oggetto ancora velato alla sua presa definitiva. E, a nostro parere, questo non è significativo solo all'interno della matematica, almeno nel senso che la costituzione di una teoria della conoscenza dovrebbe anche occuparsi della possibilità effettivamente operativa di conoscere anche, per così dire, le "condizioni di contorno" all'oggetto di volta in volta intenzionato.

Torniamo per un momento alla conoscenza di un oggetto ideale, più precisamente a quello che succede nel momento in cui definiamo un oggetto matematico. Ad esempio introduciamo una classe particolare di funzioni con la seguente definizione (non costruttiva):

> *Una funzione f definita su di un'aperto A del piano complesso* ***C*** *a valori in* ***C*** *si dice olomorfa su A se è derivabile in senso complesso in ogni punto di A.*

Innanzitutto osserviamo che la definizione posta non è vuota: una funzione polinomiale sul piano complesso è olomorfa su di esso come pure la funzione esponenziale e così via. Ma abbiamo una comprensione noetica di funzione olomorfa ottenuta dalla sola definizione? Risulta chiaro che la definizione è univoca nell' individuare completamente il concetto di funzione olomorfa, ma la conoscenza

Mathematical Sciences, The University of Manchester, 2010.

13 Rinviamo per questo a S. Skewes, *On the difference π(x)–li(x) (I),* in «Journal of the London Mathematical Society», 8, 1933, pp. 277–283 ed al seguente *On the difference π(x) – li(x) (II)*, «Proceeding of the London Mathematical Society», 5, 1955, pp. 277 – 283.

14 Y. Saouter, P.Demichel, *A sharp region where π(x)–li(x)* is positive, in «Math.Comp», 79 2010, pp. 2395–2405.

dello stesso oggetto può andare oltre; ad esempio, sappiamo che f:A→**C** è olomorfa in A se e solo se per ogni punto y di A esiste una serie di potenze centrata in y e convergente in un disco D di raggio r tale che per ogni punto p interno al disco e in A il valore di f in p coincide con la somma della serie in p. Risulta chiaro che ora la mia comprensione dello stesso concetto si è ampliata. Anche in questo caso possiamo dunque dire che la percezione oggettuale non è completamente ostensiva, anzi è più probabile che, un giorno, riusciremo a vedere lo stesso oggetto da una ulteriore sfaccettatura.

Questo esempio, come molti altri in matematica, ci permette di introdurre anche la seguente riflessione: la natura comune delle funzioni olomorfe, quella che potremmo chiamare loro essenza o meglio ancora "Idea" per ricordare Platone, possiamo etichettarla, come si fa nella prassi matematica, con il termine "olomorfia". Per Platone essa apparterrebbe ad un immutabile mondo soprasensibile, il mondo delle idee, ma qual è l'uso che un matematico fa di questo termine nel concreto della sua ricerca? Per capirci, supponiamo di voler dimostrare il (primo) teorema di Morley[15] che afferma il seguente fatto: dato un triangolo di vertici A, B e C si considerino le trisettrici degli angoli in A, B e C e le tre coppie di trisettrici che individuano angoli adiacenti allo stesso lato. Queste coppie si intersecano in tre punti che sono i vertici di un triangolo equilatero. Ora per dimostrare il teorema si traccerebbe un triangolo particolare ABC per poi arrivare alla conclusione badando di non ricorrere ad alcuna caratteristica che esso non condivida con gli altri triangoli. In questo caso stiamo utilizzando l'essenza della nozione di triangolo, ma nel caso di concetti-idee più complesse quale quella di olomorfia? In quale modo mi è lecito considerare le due nozioni di olomorfia che abbiamo poco sopra evidenziato benché tra loro logicamente equivalenti? Più brutalmente ma in modo incisivo, l'assioma della scelta e il teorema di Tyconoff sul prodotto di famiglie di spazi topologici compatti presentano un'equivalenza logica ma un aspetto descrittivo di enti matematici totalmente diversi. Posso ritenere che mi individuino la medesima "Idea"?

L'ultimo esempio tratta di quella tanto decantata *evidenza* abusata dalla nostra ragione. La proprietà che vogliamo considerare è quella della derivabilità di una funzione continua definita sull' intervallo [0, 1] o addirittura su tutto l'asse reale **R.** Se tracciamo una curva con la punta di una matita su di un foglio senza mai stai staccare la punta dal foglio, abbiamo quella che, a ragione, possiamo chiamare una curva continua. Possiamo anche tracciare il grafico di una funzione continua su **R** e pensare alla retta tangente al grafico nel punto (x, f(x))

[15] R. Guy, *The Lighthouse Theorem, Morley & Malfatti: A Budget of Paradoxes*, in «The American Mathematical Monthly», vol. 114, no. 2, 2007, pp. 97–141.

il cui coefficiente angolare è dato dalla derivata di f in x. Fatti un po' di tentativi e di grafici sul foglio la nostra intuizione geometrica ci suggerisce che l'insieme dei punti dove la tangente non esiste, cioè la derivata non esiste, debba essere in un qualche modo "piccolo". Ma quanto piccolo? E in che modo piccolo? Il problema è tanto vecchio che possiamo farlo risalire alle prime considerazioni analitiche (cioè del "calcolo") di Newton quali lo studio delle orbite dei pianeti, il moto del pendolo… e così via. Questo modo di procedere lo portò a considerare "sostenibili" le intuizioni di carattere geometrico che riguardavano il calcolo stesso. (Per correttezza dobbiamo però ricordare che le dimostrazioni contenute nei *Principia* sono geometriche). Le strutture matematiche dovevano possedere la stessa regolarità del mondo fisico e quindi, sia Newton che, molti matematici negli anni successivi si concentrarono nello studio di "funzioni continue" dato dalle curve (quasi sempre meccaniche) che descrivevano il moto di un corpo pensato puntiforme. Considerazioni di questo genere rendono plausibile l'idea che funzioni continue siano anche derivabili nei punti dove sono definite salvo qualche eccezione. Interviene nelle nostre considerazioni anche un secondo fatto che riguarda la definizione di funzione. Per Eulero, nel 1700 una funzione è ancora un'espressione analitica; cioè qualcosa che possiamo pensare come costruita a partire da funzioni elementari quali le funzioni polinomiali, o semplici trascendenti come l'esponenziale le funzioni trigonometriche e così via fino ad arrivare a sviluppi in serie convergenti. Con Dirichlet, e indipendentemente Lobacevskij, il concetto si amplia e in termini moderni una funzione f: **R**→ **R** è semplicemente una qualche legge o ricetta che ad ogni x in **R** associa uno ed un sol y in **R** che, con notazione dovuta a Eulero stesso, si denota con f(x). Ad esempio sia f: **R**→ **R** la funzione definita da f(x)=1 se x è razionale e f(x)=o se x è irrazionale. Ancora, nella prima metà dell'ottocento, A. Ampere pubblica una dimostrazione fallace che "funzioni continue sono derivabili al di fuori di un insieme di punti specifici". La sua "dimostrazione" si basa su di una erronea intuizione geometrica. Nelle sue lezioni tenute a Berlino nel 1872 K. Weierstrass presenta un esempio, pubblicato grazie all'interesse di P. du Bois-Raymond, la funzione f: **R**→ **R** definita da

$$F(x)=\sum(a^n)\cos((b^n)\pi x)$$

dove la sommatoria in n è estesa da 1 a ∞, e i parametri reali a e b soddisfano le seguenti condizioni

$$0<a<1,\ b \text{ è un intero dispari}$$

e per essi risulta

$$ab>1+(3/2)\,\pi$$

Abbiamo così un'intera famiglia di funzioni continue su **R** dipendenti dai parametri a e b, che non ammettono derivata in alcun punto di **R**. La continuità di f è ovviamente dovuta alla convergenza uniforme della serie.

Negli anni sono stati dati molti più esempi alcuni interessanti per la loro semplicità; ci piace ricordare quello di McCarthy del 1953[16]. La ricerca del rigore in analisi cominciata alla fine dell'ottocento ci fa dunque dubitare di quel "principio di evidenza" tanto caro a Cartesio e spesso evocato in tanti sistemi filosofici. I precedenti esempi mostrano alcune figure in cui la matematica permette di chiarire, persino con la possibilità di renderli operativi, una serie di concetti che possono costituire un riferimento iniziale per la riflessione filosofica. A questo punto vorremmo svolgere un percorso quasi reciproco: può la riflessione filosofica servire in qualche modo al matematico nell'elaborazione della sua attività? Inoltre, per rendere anche più relazionale ed efficace l'analisi, una scelta filosofica orienta il lavoro del matematico? A questo proposito evitiamo un banale fraintendimento: assolutamente non nel senso che il filosofo debba dire al matematico come fare matematica, questo sarebbe semplicemente assurdo. Piuttosto il contributo di una analisi filosofica può essere utilizzato perlomeno in due direzioni:

1. Il matematico, nel suo agire, in realtà non compie atti completamente sganciati da considerazioni filosofiche. Egli stesso è portatore di una visione filosofica che – *esplicita* o *implicita* che sia – ne orienta, necessariamente ancor prima che l'agire, una sorta di quadro di riferimento. Qualora questa visione sia esplicitata abbiamo la possibilità di una analisi, qualora non sia esplicitata abbiamo qualcosa di molto simile all'idea di pregiudizio intendendo che si tratta di una condizione che agisce orientando l'attività del matematico, che semplicemente non è esplicitata.
2. La visione filosofica della propria disciplina si caratterizza per una serie di implicazioni relative che partono per esempio da un punto specifico, diciamo il *motivo del contendere*, ma che si allargano in modo talora inatteso e toccano relazioni sia matematiche che più specificatamente filosofiche. La riflessione filosofica dovrebbe poter permettere di mostrare, tra le altre cose, quello che vi è di implicito e di nascosto sotto determinate assunzioni.

[16] J. McCarthy, *An Everywhere Continuous Nowhere Differentiable Function*, in «The American Mathematical Monthly», 60, 10, 1953, pp. 709–709.