Peer Review Journal
Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

*Articoli* 7 novembre 2010

# Dalle regole dell'argomentazione alla logica delle regole

Paolo Pistone

Abstract. Nell'antico dibattito tra logica e retorica la posizione classica era quella che attribuiva alla prima lo scettro della verità ed alla seconda quello dell'opinione; la moderna teoria dell'argomentazione ripropone questa contrapposizione distinguendo da una parte il regno delle verità atemporali ed acontestuali asserite dalle dimostrazioni matematiche e dall'altra quello delle credenze sempre rivedibili rivendicate attraverso argomentazioni che fanno uso dei più scaltri stratagemmi interpretativi. A questa contrapposizione si cerca di rispondere attraverso una analisi degli aspetti che legano la dimostrazione alle nozioni di verità e di interpretazione, rivendicando soprattutto il ruolo di quest'ultima nella logica formale e provando a delineare, sulla base delle intuizioni fornite dalle recenti ricerche sulla ludica (3), un approccio generale all'argomentazione, formale ed informale, che si configuri come una vera e propria logica delle regole di inferenza incentrata sulla rappresentazione esplicita degli aspetti interpretativi che ne caratterizzano l'uso e la comprensione.

*Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior* 1:1 (2010), 25–38 ISSN 2037-4445
http://www.rifanalitica.it

## 1 La "nuova retorica"

Stando alla moderna teoria dell' argomentazione (d'ora in poi $TdA$), nata dalle ricerche di C. Perelman e L. Olbrechts-Tyteca, la pratica tutta umana dell'affermare e refutare tesi è scissa in due ambiti molto distinti tra loro: quello della dimostrazione matematica e quello dell'argomentazione vera e propria, quella che ha luogo nei tribunali, nei talk-show televisivi, ma anche quella che adoperiamo nelle discussioni di tutti i giorni. Laddove infatti le dimostrazioni dei matematici o più in generale le dimostrazioni formali[1], oggi in voga anche tra i filosofi, sono svolte in un linguaggio impersonale, privo di ambiguità e di riferimenti al contesto, le argomentazioni informali devono la loro persuasività proprio ai continui riferimenti al contesto, all'uditorio particolare che ascolta, alle ambiguità del linguaggio naturale, all' emotività trasmessa dalle parole scelte. D'altra parte una dimostrazione muove, per mezzo di regole di inferenza chiare e distinte, a partire da assiomi che si assumono (momentaneamente) indubitabili a conclusioni che devono essere considerate, salvo errore umano, come sempre vere, mentre le conclusioni di un' argomentazione hanno un valore di verità ricco di sfumature, pronto ad essere messo in discussione in ogni momento. Perelman sintetizza questo aspetto affermando che, mentre la dimostrazione ha come scopo quello di stabilire verità universalmente accettate, l'argomentazione mira a "suscitare od accrescere l'adesione di un uditorio alle tesi che si presentano alla sua approvazione" (6), indipendentemente dalla verità di tali tesi e soprattutto indipendentemente dal fatto che tali tesi, espresse attraverso asserzioni piene zeppe di espressioni vaghe, ambigue, interpretabili, abbiano o meno valori di verità definiti.

Tutto questo, come lo stesso Perelman ha notato, avvicina notevolmente la TdA ad una "nuova retorica" (6) e questo aspetto ha scatenato la rinascita dell'antichissimo dibattito filosofico *logica vs retorica*.

Per gli scopi di questo articolo possiamo dunque sintetizzare la posizione dei teorici dell'argomentazione attraverso le seguenti tesi:

$TdA_1$ Mentre la dimostrazione mira a stabilire asserti come veri indipendentemente dalle opinioni di un uditorio particolare, l'argomentazione mira a persuadere un uditorio specifico ad accettare come veri asserti che possono essere veri, falsi o privi di valore di verità.

$TdA_2$ Mentre la dimostrazione non richiede interpretazione e si rivolge in tal modo ad un uditorio potenzialmente universale, l'efficacia di un'argomentazione in un dato contesto di valutazione dipende dall'esistenza, in tale contesto, di un'interpretazione che la renda persuasiva.

## 2 Verità dimostrate

Per quale motivo un asserto, in virtù di una dimostrazione, dovrebbe essere considerato da chiunque vero? L'argomento classico, adottato anche da Perelman (vedi (6)), che la dimostrazione è svolta a partire da assiomi che sono accettati da tutti, per mezzo di regole di inferenza esplicite, anch'esse accettate da tutti. Ma in virtù di cosa tutti dovrebbero accettare gli assiomi ad esempio della teoria degli insiemi ZF o le regole di inferenza della logica del primo ordine? Sembra ad esempio plausibile immaginare un consenso maggiore sugli assiomi della cosiddetta "teoria ingenua degli insiemi", decisamente intuitiva, piuttosto che su assiomi di ZF come il rimpiazzamento o la fondazione. Tuttavia gli assiomi della teoria ingenua, come è noto, danno luogo a contraddizioni (ammesso che si accettino le regole della logica del primo ordine): l'aver dimostrato un teorema in quella teoria non è affatto garanzia della verità del teorema stesso, anche assumendo una adesione pressocchè universale agli assiomi, in quanto la proprietà "essere un teorema in una teoria contraddittoria" non può essere considerata condizione sufficiente per la verità.

Facciamo un gioco: proviamo ad abbandonare per un momento l'idea che una dimostrazione cresca dagli assiomi alla tesi finale e immaginiamo che essa cresca esattamente nel senso opposto: ribaltiamo il nostro manuale di logica ed iniziamo a leggere le regole di inferenza al contrario, dalla conclusione alle possibili premesse.

Siano adesso $P$ e $O$ due giocatori e $A$ un qualunque teorema classico della teoria degli insiemi. Mettiamoci all'interno di ZF. $P$, sempre col manuale all'incontrario, si mette a cercare un percorso tra le regole di inferenza per andare da $A$ verso gli assiomi di ZF e $O$ cerca di fare lo stesso con $\neg A$. Diciamo che una strategia per $P$ (rispettivamente per $O$) è un albero i cui nodi sono etichettati da formule la cui radice è $A$ ($\neg A$) e i cui lati sono etichettati da regole di inferenza.

Il gioco funziona così: ogni giocatore presenta una strategia, la quale corrisponde, rimesso il manuale nel verso originario, ad una derivazione della propria tesi a partire da un certo numero di assunzioni. Questa strategia corrisponderà ad un argomento (formale) tenuto aperto dalle assunzioni non dimostrate (questi argomenti sono chiamati in (3) *para-dimostrazioni*). A questo punto le strategie vengono fatte interagire: applicando uno alla volta i passi dell'algoritmo di eliminazione del taglio[2] per la logica del primo ordine alla derivazione ottenuta tagliando le due derivazioni (che corrisponde ad una derivazione aperta di $A \wedge \neg A$, ovvero dell'assurdo), verrà raggiunto un punto in cui o una delle due derivazioni, intesa come albero, non avrà più nodi per continuare l'algoritmo, oppure l'altra derivazione avrà come nodi soltanto assiomi di ZF: in entrambi i casi diremo che il giocatore che presenta come strategia quest'ultima derivazione vince la partita. Vediamola come una partita a carte: ogni formula che occorre nella derivazione è una carta che il giocatore ha in mano ed ogni passo di eliminazione del taglio modifica il numero di carte che ognuno ha in mano; allora il giocatore vince il gioco se ad un certo punto gli rimangono in mano solo carte-assiomi oppure se l'avversario non ha più nulla in mano. Chiameremo ogni partita di questo gioco un *dibattito*.

Rappresentiamo una strategia ricorsivamente come l'insieme delle sue sottostrategie, in modo che un dibattito sia rappresentato ad ogni passo dal passaggio da un dibattito tra strategie ad un insieme di dibattiti tra le rispettive sottostrategie. Ad esempio, date le strategie $\sigma_C = \{\sigma_A, \sigma_B\}$ e $\sigma_{\neg C} = \{\sigma_{\neg A}, \sigma_{\neg B}\}$, si ha $(\sigma_C, \sigma_{\neg C}) \rightsquigarrow \{(\sigma_A, \sigma_{\neg A}), (\sigma_B, \sigma_{\neg B})\}$, in cui il simbolo "$\rightsquigarrow$" indica uno o più passi di computazione (in questo caso uno soltanto).

Dire che $A$ è vero significa allora dire che $P$ ha una strategia vincente $\sigma_A$, il che, nel linguaggio della teoria dei giochi, vuol dire che qualunque strategia $\sigma_{\neg A}$ presenti $O$, la partita $(\sigma_A, \sigma_{\neg A})$ è vinta da $P$.

E se invece di ZF adottassimo gli assiomi della teoria ingenua? L'esistenza di contraddizioni fornirebbe tanto a $P$ quanto a $O$ una derivazione della propria tesi che termina solo con assiomi della teoria, ed in tal caso si può vedere che la partita tra i due darebbe inizio ad una computazione, tramite l'algoritmo di eliminazione del taglio, che non termina mai, ovvero ad un dibattito infinito: come dire che $O$ non riconoscerebbe mai la verità della tesi di $P$ e viceversa.

Per rendersi conto di questo si può considerare l'analisi del paradosso di Russell presentata in (7) e (4): in particolare in (7), Prawitz presenta una traduzione della teoria ingenua degli insiemi nella deduzione naturale. In essa le due regole $\dfrac{A[t/x]}{t \in \{x : A(x)\}}$ e $\dfrac{t \in \{x : A(x)\}}{A[t/x]}$ rappresentano lo (schema di) assioma di comprensione; Prawitz, dopo aver definito $t := \{x : x \notin x\}$, presenta la seguente derivazione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[t \in t]^a \quad \dfrac{[t \in t]^a}{t \notin t}}{\bot}}{t \notin t}\;a}{t \in t} \qquad \dfrac{\dfrac{[t \in t]^a \quad \dfrac{[t \in t]^a}{t \notin t}}{\bot}}{t \notin t}\;a}{\bot}$$

che possiamo leggere come il taglio tra due dimostrazioni, una di $t \in t$, l'altra di $t \notin t$. Nel nostro linguaggio possiamo considerare questa derivazione come un dibattito tra due strategie $\sigma_{t \in t}$ e $\sigma_{t \notin t}$. Si può a questo punto vedere come, tramite l'algoritmo di eliminazione del taglio, la derivazione non fa altro che rigenerarsi all'infinito, come se ognuno dei due giocatori non riuscisse a venire a capo delle ragioni dell'altro in una discussione senza fine.

Ne possiamo concludere che dire che un asserto è vero se c'è una strategia vincente non è equivalente a dire che è vero se ce n'è una dimostrazione: un asserto $A$ è vero se esiste una dimostrazione e tale dimostrazione è "vincente" con ogni derivazione di $\neg A$, ovvero persuade ogni detrattore della sua verità: la verità, come le migliori squadre di calcio, non deve solo vincere, ma anche convincere.

Questo esempio iper-semplificato (su cui si tornerà più avanti) di argomentazione formalizzata ci aiuta a vedere come una dimostrazione determini la verità di ci che afferma solo nella misura in cui essa ci dà le basi per confutare chi la pensa diversamente, e dunque, contrariamente a quanto affermato in $TdA_1$, la verità di un teorema è funzione della capacità della dimostrazione, in virtù degli assiomi e delle regole adottate, di persuadere un uditorio favorevole o sfavorevole. Infatti la conclusione di una para-dimostrazione è accettata solo se ne sono accettate le assunzioni aperte a tale accettazione, priva di dimostrazione, dipende chiaramente dalle opinioni e usanze diffuse in un dato contesto sociale[3]. Un teorema dimostrato in una teoria contraddittoria, oppure i cui assiomi non siano accettati come tali dall'uditorio, non sarebbe vero, in quanto la sua dimostrazione non costituirebbe, relativamente a quell'uditorio, una strategia vincente.

# 3 Interpretazione e regole di inferenza

Supponiamo che un maestro voglia insegnare ad un bambino a fare delle piccole somme con dei sassetti. Il bambino impara ad aggiungere un sassetto ad una fila di sassetti gi disposti quando gli si dice "più uno!", due sassetti (uno alla volta) quando gli si dice "più due!" e così via. Immaginiamo ora di partire con una fila di tre sassetti e che il maestro chieda al bambino "più quattro!". Dopo che il bambino ha effettuato tutte le operazioni il maestro conta i sassetti e ne conta otto. Cosa ne dedurremmo immediatamente? Il bambino ha commesso un errore, ha aggiunto due sassetti in uno dei quattro passi in cui avrebbe dovuto aggiungerne soltanto uno. Per provarglielo il maestro farà ricorso alla *regola generale* del gioco, che potrebbe ad esempio esprimere in forma ricorsiva:

*Se dico "più uno!" aggiungi un sassetto, se dico "più n!" ed n non è uno, fai come se avessi detto "più n meno uno!" e poi aggiungi un sassetto!*

Dopo di che il maestro continua a spiegare:

*Partendo da tre sassetti, applica in quattro passi la regola ricorsiva e non puoi che ritrovarti con sette sassetti.*

Il bambino dice di aver compreso senz'altro ogni passaggio della dimostrazione, poi quando gli viene riproposta la stessa situazione, tre sassetti "più quattro!" diventano ancora otto sassetti. Come raccapezzarsi?

Analogamente possiamo immaginare un professore impegnato a mostrare la conclusione con un *modus ponens* di una elegante dimostrazione; uno studente lo segue e dice di aver compreso senza problemi quella prova. Successivamente, nel corso di un'altra dimostrazione, di fronte ad una implicazione del tipo "A implica B", lo studente esclama: "Beh, quindi B!".

Cos'è che di preciso il bambino non ha inteso della regola del gioco dei sassetti? E cos'ha di preciso che non va lo studente con il *modus ponens*? L'unico modo per risolvere questo genere di situazioni (peraltro incredibilmente comuni) è continuare ad interrogare l'interlocutore nella speranza di rinvenire una qualche regolarità nelle nostre incomprensioni, così da poter dire qualcosa come: "Ecco! Tu credi di dover fare *questo*, invece la regola corretta è *quest'altra*!"

Eppure quella regola, il *modus ponens*, che lo studente si sforza di non capire, non ammette un'espressione migliore della versione formalizzata:

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

lo studente accetta questa espressione, ma non la comprende, "non capisce la regola che c'è dietro", sebbene tale regola "dietro" non pu essere espressa in modo più chiaro.

Quello che forse si può dire (e che lo stesso Wittgenstein, amante di questo genere di puzzle filosofici, avrebbe probabilmente detto[4]) è che lo studente non capisce la regola a cui il professore *fa riferimento*, intendendo con essa non un astratto schema di inferenza nascosto alle spalle delle formule matematiche, bensì il modo corretto di usare quell'espressione come guida generale da applicare ai casi specifici. L'espressione non può dire allo studente cosa fare, ma egli può imparare a servirsene in maniera tale che le sue azioni siano riconosciute dagli altri in accordo col modo in cui le riconosce lui. E tale accordo, in assenza di uno schema astratto dietro le parole, non può che formarsi e mantenersi attraverso interazioni linguistiche.

In tal modo ci che determina il contenuto del *modus ponens* è l'insieme di quei contesti che consentono il costituirsi di una pratica comune entro la quale l'espressione

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

è interpretata da tutti i partecipanti al gioco come regola generale di questo. Al di fuori di un contesto di reciproco accordo e ricerca di riconoscimento quest'espressione non ha la capacità di forzare lo studente ad accettare la conclusione della dimostrazione del suo professore.

Il costituirsi di particolari forme di accordo e interazione linguistica che rendono il reciproco confronto delle interpretazioni eccezionalmente diretto e semplice (ed è proprio in questo che consiste la formalizzazione) non deve lasciar pensare che queste stesse forme non possano, in linea di principio ed anche in pratica, presentare i problemi interpretativi che in ogni ambito l'attività del linguaggio comporta.

Le riflessioni di questi paragrafi, mettendo in discussione i capisaldi su cui i sostenitori della $TdA$ hanno eretto la distinzione tra dimostrazione ed argomentazione, spingono alla ricerca di un quadro unitario per la rappresentazione di entrambe; in quanto segue saranno forniti alcuni spunti in tal senso.

## 4 La logica delle argomentazioni

Discussione tra genitori, dice lei: "Da quando se n'è andato di casa nostro figlio non ha ancora trovato la sua strada". Risponde lui: "Ma sì che l'ha trovata cara, gli abbiamo lasciato il TomTom!".

Discussione tra appassionati di politica: "L'Italia è sul bordo di un dirupo ma finalmente con Berlusconi faremo passi avanti" Risponde l'altro: "Il problema è proprio questo!"

Proviamo a riportare questi esempiù nel gioco presentato in precedenza: ci accorgiamo che in entrambi i casi il dibattito termina immediatamente (senza un vincitore) per l'impossibilità di farà interagire in modo durevole due diverse strategie interpretative, in quanto ad esempio una strategia per la madre avrà a che fare con i problemi del figlio nel lavoro e nella vita mentre una strategia per il padre avrà a che fare con delle indicazioni stradali.

Per cogliere questo aspetto si consideri, nel calcolo dei sequenti, i seguenti esempi di tagli da eliminare:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash B} \quad \overset{\pi_2}{\vdash C}}{\vdash A} \qquad \dfrac{\overset{\lambda}{\vdash \neg B, \neg C}}{\vdash A}}{\vdash}\ cut$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash B} \quad \overset{\pi_2}{\vdash C}}{\vdash A} \qquad \dfrac{\overset{\lambda}{\vdash D, \neg C}}{\vdash A}}{\vdash}\ cut$$

Nel primo caso $A$ e $\neg A$ interagiscono ed il loro taglio (denotato dall'espressione *cut*) può essere ridotto in un passo alla seguente derivazione:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash B} \quad \overset{\lambda}{\vdash \neg B, \neg C}}{\vdash \neg C}\ cut \qquad \overset{\pi_2}{\vdash C}}{\vdash}\ cut$$

nella quale il taglio su $A$ è ridotto a due tagli consecutivi sulle sottoformule $B$ e $C$.

Al contrario, nel caso nella seconda derivazione, questo passo di computazione non può essere portato a termine in quanto le sottoformule di $A$ e $\neg A$ non interagiscono tra di loro: diremo quindi che la computazione diverge. (Si veda (3)). In questi casi possiamo affermare che i due giocatori sostengono asserti che interagiscono tra loro (possiamo scriverli effettivamente come $A$ e $\neg A$), ma gli associano *strategie divergenti*, vale a dire: non si capiscono[5]; scriverò questo nella forma $(\sigma_A, \sigma_{\neg A}) \rightsquigarrow \Omega$, in analogia con l'espressione $t \rightsquigarrow \Omega$, usata nel $\lambda$-calcolo per indicare un termine la cui computazione diverge (come ad esempio il termine $Y = (\lambda x.(x)x)\lambda x.(x)x$ ). L' espressione $(\sigma_A, \sigma_{\neg A}) \rightsquigarrow \Omega$ è da leggere come il fatto che il dibattito tra $P$ e $O$ o si interrompe subito, come nel caso appena analizzato, perché i due evidentemente dicono con le stesse parole cose diverse, oppure, come nel caso del dibattito nella teoria ingenua degli insiemi, continua all'infinito senza che nessuno dei due abbia motivo di fermarsi nel cercare giustificazioni e di dare ragione all'altro. Ad esempio, nel dibattito è $(\sigma_{t \in t}, \sigma_{t \notin t})$ della teoria ingenua, si verifica che $(\sigma_{t \in t}, \sigma_{t \notin t}) \rightsquigarrow \{(\sigma_{t \in t}, \sigma_{t \notin t})\}$, e dunque che $(\sigma_{t \in t}, \sigma_{t \notin t}) \rightsquigarrow \Omega$ (ecco il perché dell'analogia con $Y$).

Nel caso di un dibattito $(\sigma, \sigma')$ con un vincitore scriverò invece $(\sigma, \sigma') \rightsquigarrow \maltese$(con riferimento alla ludica di J.Y. Girard, vedi (3)), per intendere che la computazione converge su un accordo su chi ha ragione. Ricordiamo infatti che un giocatore vince il dibattito quando il suo avversario arriva a sostenere una serie di tesi per cui non ha argomenti (ovvero esaurisce le sue sottostrategie): in tal modo il giocatore, al termine di un confronto serrato, avrà dimostrato all'avversario di "saperla più lunga".

Da quanto detto ricaviamo subito che il dar vita ad una interazione argomentativa non è indice del fatto che i contendenti si stiano comprendendo a vicenda; anche quelle del maestro con il bambino sui sassetti e del professore con lo studente sul *modus ponens* erano interazioni argomentative divergenti.

Diciamo a questo punto che un asserto $A$ è vero in un dato contesto di valutazione quando esiste una strategia $\sigma_A$ per quell'asserto che vincente su tutte le strategie presenti in quel contesto, e che un asserto è vero *tout-court* quando esiste una strategia vincente per quell'argomento. Ricordiamo che se nel contesto esiste un giocatore che si oppone a quello che gli si dice ma senza capirlo fino in fondo, ovvero se esiste una strategia $\sigma_{\neg A}$ tale che $(\sigma_A, \sigma_{\neg A}) \rightsquigarrow \Omega$, $A$ non può essere vero.

Supponiamo adesso che ogni giocatore decida la propria strategia passo dopo passo, oppure che la decida dal principio ma che ad ogni passo del dibattito possa scegliere se modificare o meno la parte di strategia che non ha ancora utilizzato; introduciamo cio una visione dinamica dell'interazione linguistica. Di conseguenza, durante una partita, ad ogni mossa il giocatore decide il suo prossimo passo (o conferma o modifica quello che aveva già stabilito)[6]. Possiamo a questo punto dare una definizione del *contenuto immediato* di un asserto $A$ per un giocatore $P$ (in un dato contesto), che chiameremo senza troppa fantasia è $\mathfrak{Ci}_P(A)$, come l'insieme di mosse che egli, in virtù della sua padronanza della lingua, è disposto ad accettare come prima mossa della sua strategia. Possiamo chiamare inoltre *co-contenuto immediato* di $A$ per $P$ (notazione $co\mathfrak{Ci}_P(A)$) l'insieme di mosse[7] per un avversario $O$ di $P$ tali che, se una di queste fosse la prima mossa di una strategia $\sigma_{\neg A}$ di $O$, il primo passo dell'interazione (ovvero dell'eliminazione del taglio) nella partita $(\sigma_A, \sigma_{\neg A})$, nella quale $\sigma_A$ è una qualunque strategia che $P$ è disposto a scegliere, non genererebbe divergenza. Possiamo guardare al $co\mathfrak{Ci}_P(A)$ come ad una sorta di "spazio delle interazioni" non immediatamente divergenti con ogni strategia in $\mathfrak{Ci}_P(A)$. In tal modo si può facilmente vedere che il $\mathfrak{Ci}_P(A)$ di un asserto $A$ per $P$ è contenuto nel $co - co\mathfrak{Ci}_P(A)$, ovvero nell'insieme delle mosse che non generano immediata divergenza con ogni mossa in $co\mathfrak{Ci}_P(A)$, mentre non è affatto detto che valga il viceversa: non c'è motivo di pensare che la competenza di un individuo sia *completa*[8] rispetto alle sue possibilità di interazione, ossia possono esserci mosse al di fuori di $\mathfrak{Ci}_P(A)$, ovvero mosse che $P$ non conosce, che tuttavia possono appartenere a strategie che, se utilizzate in un dibattito con una qualunque strategia in $co\mathfrak{Ci}_P(A)$ (ossia con una qualunque strategia per $\neg A$ tra quelle di cui $P$ "si fida"), non generano immediatamente divergenza. Questo aspetto, che non è possibile approfondire in questa sede, porta a considerare il contenuto immediato una nozione pubblica, ovvero determinabile interattivamente e di cui i singoli parlanti hanno, in molti casi, una conoscenza solo parziale.

Diremo che due avversari, $P$ e $O$, *condividono* il contenuto immediato di $A$ quando vale $\mathfrak{Ci}_P(A) \subseteq co\mathfrak{Ci}_O(\neg A)$ oppure quando vale $\mathfrak{Ci}_O(\neg A) \subseteq co\mathfrak{Ci}_P(A)$: entrambi i casi ci assicurano la non immediata divergenza dell'interazione, e si noti che, per motivi di completezza accennati poco sopra, non sono affatto equivalenti. Si potrebbe scegliere di assumere che ogni giocatore condivida con se stesso i contenuti immediati degli asserti che utilizza, il che permetterebbe di rendere la notazione molto meno pesante e decisamente più elegante, tuttavia quale sarebbe il motivo per stabilire a priori che ogni parlante usa, in ogni contesto, un asserto e la sua negazione in accordo con i criteri di compatibilità finora discussi?

Seguendo queste definizioni si può vedere allora che due giocatori si comprendono quando il loro dibattito converge e possiamo vedere che quando condividono i contenuti immediati di tutti gli asserti che occorrono nelle loro strategie sicuramente il dibattito converge. Questo dà senso alla definizione del *contenuto* di un asserto $A$ rispetto ad un giocatore $P$, che scrivo $\mathfrak{C}_P(A)$, come segue: definiamo per prima cosa, ricorsivamente, la relazione *l'asserto A presuppone la mossa* **m** *rispetto al parlante P* (si noti che una mossa non è nient'altro che una regola di inferenza) attraverso le clausole:

*i.* $A$ presuppone $\mathbf{m}$ per $P$ se $\mathbf{m} \in \mathfrak{Ci}_P(A)$;

*ii.* $A$ presuppone $\mathbf{m}$ per $P$ se $A$ presuppone $\mathbf{m}'$ per $P$ ed esiste un asserto $A'$ che occorre in $\mathbf{m}'$ tale che $A'$ presuppone $\mathbf{m}$ per $P$[9].

Definiamo allora $\mathfrak{C}_P(A)$ [10] come l'insieme delle mosse presupposte da $A$ per $P$. Sostituendo, nella definizione di $\mathfrak{C}_P(A)$, il $\mathfrak{Ci}_P(A)$ con il $co\mathfrak{Ci}_P(A)$, otteniamo la definizione del *co-contenuto* di $A$ per $P$ (notazione $co\mathfrak{C}_P(A)$).

Si vede subito che se $\mathfrak{C}_P(A) \subseteq co\mathfrak{C}_O(\neg A)$, oppure $\mathfrak{C}_O(\neg A) \subseteq co\mathfrak{C}_P(A)$, il dibattito tra $P$ e $O$ non può che convergere. Tuttavia è decisamente troppo forte richiedere che due parlanti si comprendano nel corso di un dibattito solo quando condividono il contenuto immediato di tutte le espressioni presupposte da ogni espressione coinvolta nel dibattito stesso, ed infatti si può notare come non sia in generale vero che da $(\sigma_A, \sigma_{\neg A}) \rightsquigarrow \maltese$segua $\mathfrak{C}_P(A) \subseteq co\mathfrak{C}_O(\neg A)$ (n d'altra parte $\mathfrak{C}_O(\neg A) \subseteq co\mathfrak{C}_P(A)$): se infatti $A$ è del tipo $B \vee C$ e $\sigma_A = \{\sigma_B\}$, in quanto una strategia per $B$ è sufficiente per costruire una strategia per $B \vee C$, e dunque $\neg A = \neg B \wedge \neg C$, ovvero $\sigma_{\neg A} = \{\sigma_{\neg B}, \sigma_{\neg C}\}$, si ha che $(\sigma_A, \sigma_{\neg A}) = (\{\sigma_B\}, \{\sigma_{\neg B}, \sigma_{\neg C}\}) \rightsquigarrow \{(\sigma_B, \sigma_{\neg B})\} \rightsquigarrow \maltese$, indipendentemente dal fatto che valga o meno $\mathfrak{Ci}_P(C) \subseteq co\mathfrak{Ci}_O(\neg C)$ o $\mathfrak{Ci}_O(\neg C) \subseteq co\mathfrak{Ci}_P(C)$; la strategia $\sigma_C$ viene semplicemente ignorata per garantire l'interazione.

Due giocatori scoprono di attribuire ad un asserto lo stesso contenuto solo intavolando uno o più dibattiti e verificando così se questi convergono, esattamente come nei casi discussi al paragrafo precedente: attribuire (e condividere) un contenuto significa così associare ad un asserto un frammento del suo uso nell'interazione argomentativa.

Possiamo naturalmente attribuire ad uno stesso asserto contenuto distinti, così come possiamo attribuire al "trovare la propria strada" o al "fare dei passi avanti" (se si è davanti a un dirupo) almeno due interpretazioni. La correttezza di tali interpretazioni sarà sempre valutata nel contesto ricordando che, laddove si genera divergenza, non si vince, vale a dire: nell'incomprensione non c'è verità che tenga.

# 5 La logica delle regole

Gli studiosi del $\lambda$-calcolo sanno bene che nel loro campo logica è sinonimo di convergenza. Infatti nel $\lambda$-calcolo il cosiddetto tipaggio, che consiste nell'attribuire ai termini una formula in accordo con un sistema logico, garantisce la terminazione della computazione dei termini stessi. Ad esempio il termine $t = (\lambda x.y)z$ può essere tipato come $(\lambda x.y)^{A \to B} z^A$ in maniera tale che la riduzione $t \rightsquigarrow y^B$ corrisponde esattamente al *modus ponens*.

Nel nostro caso vale qualcosa di molto simile: sia $P$ un giocatore che sostiene la tesi $A \to B$ e $O$ un giocatore che sostiene l'antitesi $\neg(A \to B)$, ovvero $A \wedge \neg B$. Se $P$ e $O$ utilizzano strategie puramente logiche, ovvero strategie che si limitano a inferenze per l'introduzione o l'eliminazione dei connettivi logici, $\mathfrak{Ci}_P(A \to B)$ conterrà la mossa che deriva $A \to B$ per mezzo di una strategia per $B$ a partire dall'assunzione di $A$ (che scriverò $\sigma_B(A)$ per intendere che $\sigma_B$ è funzione di $A$). D'altra parte $\mathfrak{Ci}_O(A \wedge \neg B)$ conterrà la mossa che deriva $A \wedge \neg B$ a partire da una strategia $\sigma_A$ per $A$ e da una strategia $\sigma_{\neg B}$ per $\neg B$; vale quindi la seguente identità:

$$(\sigma_{A \to B}, \sigma_{A \wedge \neg B}) = (\{\sigma_B(A)\}, \{\sigma_A, \sigma_{\neg B}\})$$

il primo passo di computazione non genera divergenza in quanto l'interazione tra $\sigma_B(A)$ e $\sigma_{\neg B}$ genera una strategia che è del tipo $\sigma_{\neg A}$ (in quanto un argomento per $B \wedge \neg B$ a partire dall'assunzione aperta di $A$ equivale ad un argomento per $\neg A$), la quale interagisce con la strategia $\sigma_A$, concludendo il passo del gioco; possiamo scrivere quanto accade in questo modo

$$(\{\sigma_B(A)\}, \{\sigma_A, \sigma_{\neg B}\}) \rightsquigarrow \{(\sigma_B(A), \sigma_{\neg B}), ((\sigma_B(A), \sigma_{\neg B}), \sigma_A)\}$$

riconoscendo proprio il fatto che la strategia risultante dall'interazione $(\sigma_B(A), \sigma_{\neg B})$ corrisponde ad una strategia per $\neg A$ (ovvero possiamo "tiparla" $\neg A$) e quindi interagisce con la strategia $\sigma_A$. Per una maggior chiarezza possiamo rileggere questa interazione nel calcolo dei sequenti attraverso la seguente riduzione di un taglio su $A \to B$ a due tagli su $A$ e su $B$:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi}{A \vdash B}}{\vdash A \to B} \qquad \dfrac{\overset{\lambda_1}{\vdash A} \quad \overset{\lambda_2}{\vdash \neg B}}{\vdash A \wedge \neg B}}{\vdash}\ cut$$

si riduce a

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi}{A \vdash B} \quad \overset{\lambda_2}{\vdash \neg B}}{A \vdash}\ cut \qquad \overset{\lambda_1}{\vdash A}}{\vdash}\ cut$$

Questo esempio mostra l'esistenza, tra le regole logiche, di una simmetria che garantisce la convergenza dell'interazione: infatti se il contenuto immediato di $A$ e $\neg A$ è quello strettamente logico, le premesse di $A$ saranno sufficienti a garantire l'interazione con le premesse di $\neg A$. Questo fatto molto importante è alla base del teorema di eliminazione del taglio dovuto a Gentzen (si veda (5)) e ci dice che, attribuendo agli asserti un contenuto immediato determinato esclusivamente dai connettivi logici, si ottengono interazioni convergenti, ovvero dibattiti in cui i giocatori comprendono e riconoscono le posizioni degli avversari. Ci sono vari modi per definire esplicitamente questa importante proprietà (ad esempio chiamata *principio di inversione* in (7) e *requisito di armonia* in (2)), ma si può vedere che nel formalismo delle strategie che è stato introdotto questa corrisponde esattamente al requisito, osservato nel paragrafo precedente, che $\mathfrak{Ci}_P(A) \subseteq co\mathfrak{Ci}_O(\neg A)$ o che $\mathfrak{Ci}_O(\neg A) \subseteq co\mathfrak{Ci}_P(A)$, ovvero alla condivisione dei contenuti immediati.

Vediamo qui all'opera un principio generale che ci permette di fare previsioni circa gli esiti di una interazione argomentativa, indipendentemente dalla natura logica o meno delle regole coinvolte: diremo che un asserto $A$ ammette (in un dato contesto, per due parlanti $P$ ed $O$) una *interpretazione armonica* quando esiste una mossa in $\mathfrak{Ci}_P(A)$ ed una mossa in $\mathfrak{Ci}_O(\neg A)$ che, poste una contro l'altra, non generano divergenza, ovvero quando $P$ ed $O$ sono disposti ad accettare una interpretazione di $A$ e $\neg A$ che permette al loro dibattito di non arrestarsi immediatamente. La condivisione dei contenuti immediati corrisponde allora al fatto che ogni interpretazione di $A$, tra $P$ ed $O$ sia armonica.

Ricapitolando, la ricerca di interpretazioni armoniche dà vita ad un processo che immerge i contenuti immediati relativi ad un parlante, che possono ben essere arbitrari ed individuali, nei co-contenuti immediati relativi ad un altro, i quali sono tutt'altro che arbitrari, essendo insiemi di mosse determinati tramite un criterio interattivo. In tal modo, l'attività interpretativa viene a costituirsi come una pratica pubblica, sorretta da nient'altro che dai risultati di interazioni concrete.

Ricordando che un asserto può ammettere potenzialmente infiniti contenuti immediati, possiamo concludere che una argomentazione è tanto più vicina ad una dimostrazione quanto più gli asserti che vi occorrono possiedono interpretazioni armoniche ed è tanto più vicina ad una argomentazione retorica (se non al vaneggio puro) quanto più difficili da scovare sono le sue interpretazioni armoniche. Si noti che l'esistenza di una certa interpretazione, armonica o meno che sia, è sempre funzione di una quantità a priori indescrivibile di fattori dipendenti dal contesto, come mostrato dagli esempi sui sassetti e sul *modus ponens*, nei quali chissà quale aspetto non considerato dal maestro e dal professore aveva attirato l'attenzione del bambino e dello studente al punto da far loro fraintendere delle semplici regole.

La distinzione tra argomentazione retorica e dimostrazione è determinata quindi dalla probabilità che i partecipanti ad una interazione argomentativa condividano i contenuti immediati degli asserti che usano e dalla probabilità che, qualora questa condivisione non si realizzi, essi scelgano quelle mosse, se ce ne sono, destinate a generare convergenza; di conseguenza diventa decisivo quanto queste probabilità risultino sensibili alle variazioni del contesto: le dimostrazioni matematiche ammettono anch'esse interpretazioni non armoniche, ma certamente solo in contesti abbastanza difficili da escogitare, a differenza ad esempio delle argomentazioni di un politico estremista, le quali in molti casi risultano chiare ed esplicite ad un pubblico della sua parte, e magari ambigue, vaghe, addirittura incomprensibili ad un uditorio più differenziato.

Diremo allora che, se $P$ crede che $A$, $P$ ha un buon argomento per $A$ se tale argomento determina una strategia $\sigma_A$ che risulta vincente su tutti (o quasi) gli argomenti per $\neg A$ in cui $P$ si imbatte nel contesto in cui ha vissuto interagendo con altre persone interessate alla verità di $A$. Avere un buon argomento per $A$ comporta allora relazionarsi con un contesto in cui c'è accordo sull'uso dell'espressione $A$, sul modo di interpretarla, in cui cio i parlanti possono verificare reciprocamente che dire $A$ è dire qualcosa dotato di senso. Questo è sufficiente a dire che $A$ è vero?

Supponiamo che un parlante $O$ di quel contesto tiri fuori una nuova strategia $\sigma_{\neg A}$ tale che $(\sigma_A, \sigma_{\neg A}) \rightsquigarrow \Omega$. A quel punto $\sigma_A$ non è più vincente in quel contesto, ovvero $A$ non è vero in quel contesto, ma non c'è solo questo: non ci sarebbe più accordo sul contenuto di $A$, il che produrrebbe plausibilmente delle attività interpretative di revisione dei contenuti immediati di molte espressioni connesse con le strategie utilizzate per provare $A$, e dunque anche dei loro contenuti.

Supponiamo adesso che invece $(\sigma_A, \sigma_{\neg A}) \rightsquigarrow \maltese$: in questo caso il contenuto di $A$ non muta affatto, bensì si scopre che $A$ non era mai stato vero.

In definitiva la verità di un asserto, nel momento in cui viene connessa non solo con gli argomenti utilizzati per provarla, ma anche con le forme di accordo interpretativo che l'uso di tali argomenti porta in essere, non può che venir considerata funzione del contenuto di tale asserto: se il contenuto varia, può variare la verità, sebbene questa variazione non necessariamente metta in discussione il valore di verità precedente, proprio perché è il contenuto, ovvero gli accordi interpretativi, ad essere mutato; se invece il contenuto non varia ma si scoprono nuovi argomenti, i parlanti scoprono un valore di verità diverso da quello che conoscevano, ma essendo i nuovi argomenti in linea di principio disponibili anche in precedenza, possono certo ritenere che il nuovo valore di verità fosse quello corretto anche quando erroneamente pensavano fosse quello sbagliato.

## 6 Conclusioni

In questo articolo si è accennato ad un modello, ispirato alle attuali ricerche nel campo della ludica, che permette di dar conto in modo unitario di dimostrazioni e argomentazioni informali attraverso la rappresentazione esplicita degli aspetti dell'interazione linguistica direttamente connessi con l'interpretazione e la valutazione del contesto.

Al di là dell'effettiva plausibilità di questo approccio, il quale, prima di potersi presentare come una adeguata teoria dell'argomentazione, deve dare prova di saper spiegare in maniera efficace fenomeni interpretativi fondamentali e specifici come la metafora, l'ironia, la vaghezza[11], gli argomenti qui presentati mirano a mostrare come sulla distinzione dei teorici $TdA$ tra dimostrazione e argomentazione e, in definitiva, tra logica e retorica, gravi il peso di una analisi forse non sufficientemente ricca proprio di ciò che rende le dimostrazioni dei matematici così (apparentemente) lontane dal loro argomento di studio.

# Note

[1]Per gli scopi di questo articolo farò riferimento alle dimostrazioni intendendo, con queste, derivazioni a partire da assiomi svolte all'interno di un qualche sistema formale ed in un dato linguaggio.

[2]Per una panoramica sull'eliminazione del taglio in questo contesto, che ovviamente non è possibile fornire in questo articolo, si vedano (3) e (5).

[3]Possiamo leggere le para-dimostrazioni come una rappresentazione formale dei sillogismi dialettici aristotelici.

[4]Si veda ad esempio (8).

[5]Si noti che divergenti erano anche le strategie dei due giocatori nella teoria ingenua degli insiemi.

[6]Una descrizione di come questo possa essere formalizzato si può trovare sempre in (3).

[7]In realtà per rendere più efficace questa definizione sarebbe necessario introdurre la distinzione tra argomenti *canonici* e *non canonici*, o senza tagli, cruciale in teoria della dimostrazione e, secondo Dummett e Cozzo ((1)) decisiva anche nella filosofia del linguaggio. In logica un argomento canonico è un argomento in cui ogni passo di inferenza rispetta il principio della sottoformula, ovvero in cui ogni formula che occorre in una delle premesse è sottoformula di almeno una formula che occorre nella conclusione; per la filosofia del linguaggio Cozzo propone (detta in breve) di considerare canonico un argomento in cui ogni regola di inferenza sia riconosciuta da un parlante competente del linguaggio come non richiedente alcuna ulteriore giustificazione. Questa distinzione in effetti permette in molti casi (ma non in tutti) di ricondurre il contenuto immediato di un asserto ad un insieme finito di possibili mosse.

[8]Potremmo scegliere di chiamare *contenuto immediato completo* (scriviamolo $\mathfrak{Cic}_P(A)$) il $co - co\mathfrak{Ci}_P(A)$, verificando l' equazione $\mathfrak{Cic}_P(A) = co - co\mathfrak{Cic}_P(A)$. Questo pone l'interessante questione della *completezza interna* di un contenuto immediato, equivalente alla validità di $\mathfrak{Ci}_P(A) = \mathfrak{Cic}_P(A)$. Un contenuto immediato che soddisfi tale identità soddisfa $\mathfrak{Ci}_P(A) = co - co\mathfrak{Ci}_P(A)$, ovvero è determinato interamente dai risultati delle sue interazioni. Si noti che il primo teorema di incompletezza comporta l'impossibilità, per alcuni asserti (della forma $\exists X\alpha$, dove $\exists$ rappresenta la quantificazione del secondo ordine e $\alpha$ è una formula senza quantificatori), di avere un contenuto immediato che soddisfi la completezza interna. Per una discussione sulla nozione di completezza interna, una proprietà ben più forte della tradizionale completezza, anche in riferimento ai celebri risultati sull'incompletezza, si può vedere (3).

[9]Questa terminologia è in parte ripresa da (1).

[10]Tornando alla distinzione tra argomenti canonici e non canonici, è più opportuno considerare, nella definizione di "presuppone", il contenuto immediato degli asserti che occorrono in strategie indotte da argomenti canonici per $A$ e considerare, al posto di una strategia indotta da un argomento $\pi$ non canonico, la strategia indotta dalla riduzione (sempre tramite eliminazione del taglio) di $\pi$ in forma canonica. Tuttavia questa modifica, se da una parte semplifica molto la struttura formale dei contenuti, dall'altra porta a richiedere che ogni argomento informale non canonico sia riducibile in forma canonica, un requisito assai forte e discutibile. Per una discussione in merito si può fare riferimento a (1).

[11]Anche questi per il momento genericamente inquadrabili come forme particolari ed originali di attribuzione di contenuto immediato.

## Riferimenti bibliografici


[1] Cozzo C. (2002), *Does epistemological holism lead to meaning holism?*, in *Topoi* 21, The Netherlands, Kluwer Academic Publisher; 36

[2] Dummett M. (1991), *The logical basis of metaphysics*, New York, Columbia University Press; 33

[3] Girard J.Y. (2001), *Locus solum: from the rules of logic to the logic of rules*, in *Mathematical structures in Computer Science*, Cambridge; 25, 27, 30, 36

[4] Girard J.Y. (1998), *Light Linear Logic*, in *Information and Computation* 143; 27

[5] Girard J.Y., Lafont Y., Taylor P. (1989), *Proofs and types*, in *Cambridge tracts in Theoretical Computer Science*, Cambridge; 33, 36

[6] Perelman C. (1981), *Il dominio retorico, retorica e argomentazione*, Torino, Piccola biblioteca Einaudi; 26

[7] Prawitz D. (1965), *Natural deduction, a proof-theoretical study*, Stoccolma, Almqvist and Wiskell; 27, 33

[8] Wittgenstein L. (2002), *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*, Torino, Universale Bollati Boringhieri (prima edizione pubblicata nel 1976). 36

# A proposito degli autori

### Indirizzo di contatto

Paolo Pistone heighteight@fastwebnet.it.

# Copyright