Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 © http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

IL PROBLEMA DI PLATONE. UN'INTRODUZIONE STORICA ALLA FILOSOFIA DELLA MATEMATICA

Marco Panza e Andrea Sereni

[Carocci editore – Roma, 2010]

Pietro Angelo Casati

Per filosofia della matematica si intende la riflessione filosofica circa la natura e le finalità della matematica, nel suo duplice aspetto di scienza pura e di strumento interpretativo della realtà. Di cosa si occupa esattamente la matematica? Entità come numeri, insiemi, funzioni esistono davvero? E se sì, in che senso? Come fanno i matematici a conoscere questi oggetti? Com'è possibile che lo studio di oggetti astratti sia così utile per lo studio di oggetti concreti? Il tentativo di rispondere a queste domande caratterizza la riflessione sui principali problemi propri alla filosofia della matematica; questioni fra loro così strettamente connesse che è difficile capire come se ne possa affrontare una senza affrontare almeno in parte anche le altre.

Prendendo le mosse forse dal più classico di questi problemi, quello dell'ontologia della matematica, richiamato nel titolo come "il problema di Platone", il volume ripercorre le tappe storiche di una particolare opzione filosofica volta a risolverlo, il platonismo, fino a ricostruire a grandi linee il dibattito che si è sviluppato su di essa dagli anni sessanta del XX secolo, e che è tuttora in corso. Il termine "platonismo" si usa in filosofia della matematica per caratterizzare un particolare tipo di realismo, secondo cui gli asserti della matematica descrivono un dominio di oggetti astratti, che esistono indipendentemente dall'attività conoscitiva del matematico. La tesi alternativa al platonismo riguardo lo *status* ontologico degli enti matematici è il nominalismo, ovvero la negazione di qualunque impegno ontologico della matematica. Spesso i nominalisti ritengono che sia comunque possibile continuare a riferirsi ad oggetti matematici, purché sia chiaro che si tratta di un semplice espediente per parlare unicamente di oggetti concreti, una comoda *façon de parler*.

Il problema di Platone di Marco Panza e Andrea Sereni, edito da Carocci nella collana Frecce, è un'introduzione storica e ha tutti i pregi di questo tipo di impostazione: dopo una decina di pagine volte a richiamare al lettore alcune nozioni e distinzioni fondamentali (per esempio la distinzione tra oggetti concreti e astratti) i capitoli iniziali presentano una ricostruzione del problema a partire da Platone, Aristotele e Proclo per arrivare fino a Kant, fornendo così al lettore inesperto il *background* necessario per comprendere la rilevanza del dibattito contemporaneo.

AUTORE. Pietro Angelo Casati. pietroangelo.casati@gmail.com

Il modo di fare filosofia della matematica di Frege differisce da quello di Kant molto di più di quanto questo differisca da quelli di Platone, Aristotele e Proclo. Questa differenza è dovuta principalmente all'attenzione di Frege verso un modo profondamente rinnovato di fare matematica che si afferma nel XIX secolo; si pensi agli sforzi compiuti per dare all'analisi un assetto concettuale soddisfacente dopo lo sviluppo conosciuto nel secolo precedente, tanto ricco di risultati e di applicazioni, quanto caotico e confuso nelle premesse teoriche. In tale contesto la filosofia della matematica fu stimolata in parte da quell'esigenza di rigore che percorre un po' tutta la matematica ottocentesca e in parte dalla necessità di valutare le conseguenze di fatti nuovi importanti come la scoperta delle geometrie non euclidee o l'emergere della teoria degli insiemi. Con "crisi dei fondamenti della matematica" si indica l'ampio dibattito che ha coinvolto la comunità dei matematici e dei filosofi nel primo trentennio del XX secolo, incentrato sulla natura della matematica, cioè su quali siano, se ci sono, gli enti primitivi indimostrabili che costituiscono il punto di partenza di questa disciplina. In sintesi, ci si chiedeva qual è la risposta giusta alla domanda "Cos'è la matematica?". Dalle nuove impostazioni epistemologiche derivò addirittura la nascita di nuove discipline, come la teoria della dimostrazione, ed il consolidamento di quelle emergenti, come la logica matematica.

Fornendo un esposizione della nascita e dello sviluppo di alcuni approcci al problema dei fondamenti che ebbero rilevanza speciale, logicismo, formalismo e intuizionismo, il secondo capitolo verte sulle radici storiche più recenti, fino ai teoremi di Gödel e al suo platonismo. I teoremi di Gödel nascevano in relazione al programma di Hilbert, che chiedeva di formalizzare tutte le teorie matematiche esistenti attraverso un insieme finito di assiomi e dimostrare che questi assiomi non conducono a contraddizioni. Con qualche semplificazione, il primo teorema di incompletezza di Gödel afferma che in ogni sistema assiomatico consistente in grado di descrivere l'aritmetica dei numeri interi è possibile costruire proposizioni che non possono essere dimostrate né confutate sulla base degli assiomi di partenza. Il secondo teorema, che si dimostra formalizzando una parte della dimostrazione del primo teorema all'interno del sistema stesso, afferma che un sistema coerente non può essere utilizzato per dimostrare la sua stessa coerenza. Gli effetti sul programma di Hilbert furono devastanti; infatti, se nemmeno un sistema formale come quello dell'aritmetica elementare può essere utilizzato per provare la propria stessa coerenza, così, a maggior ragione, esso non può essere utilizzato per dimostrare la coerenza di sistemi più potenti. I due teoremi, il primo in particolare, furono da Gödel interpretati come una conferma del platonismo: la sua convinzione era che la verità, essendo qualcosa di oggettivo, non può essere ricondotta semplicemente alla nozione di dimostrabilità.

Dopo aver dedicato uno spazio relativamente breve alla ricognizione storica del problema, con il terzo capitolo l'attenzione degli autori si sposta su due articoli di Paul Benacerraf, che stanno all'origine del dibattito contemporaneo, allo scopo di fornire un panorama articolato e introduttivo della discussione attuale su questo problema, che la filosofia contemporanea della matematica, come mostrano efficacemente i primi capitoli, eredita dalla sua tradizione.

Il primo articolo di Benacerraf che diede origine a un ampio e ancor vivo dibattito su una possibile obiezione ontologica al realismo matematico, *What Numbers Could Not Be*, apparve nel 1965. L'obiezione ontologica di Benacerraf parte dall'osservazione che, a seconda di quale teoria degli insiemi viene presupposta, la serie dei numeri naturali 1, 2, 3,... viene identificata con due diverse serie di insiemi. Ma un oggetto vero e proprio non può essere allo stesso tempo identico a due oggetti distinti; oltretutto, i due insiemi che dovrebbero corrispondere allo stesso numero hanno diverse cardinalità[1]. Dunque, non essendoci un'argomentazione

[1]Cfr. (Benacerraf, 1965).

per decidere quale concezione colga effettivamente la natura del numero in quanto tale[2], ne consegue che i numeri non possono essere identificati con insiemi particolari.

Mathematical Truth apparve nel 1973; in esso Benacerraf presenta un dilemma che scaturisce da due esigenze opposte, ma entrambe all'origine delle varie teorie sulla natura delle verità matematiche:

1. la preoccupazione di avere una teoria semantica omogenea in cui la semantica per gli enunciati della matematica sia parallela alla semantica per il resto del linguaggio;

2. la preoccupazione che la trattazione della verità matematica si unisca ad una plausibile epistemologia[3].

Secondo Benacerraf, la storia della filosofia della matematica mostra come «tutte le teorie concernenti la verità matematica cerchino di accontentare uno di questi due padroni *a spese dell'altro*.»[4] Il problema è che non sembra plausibile asserire allo stesso tempo che gli oggetti matematici sono astratti, che esistono indipendentemente da noi e che sono per noi accessibili. È il cosiddetto problema dell'accesso. Una grande parte della discussione degli ultimi trentacinque anni sul problema di Platone si è concentrata, esplicitamente o meno, sui tentativi di rispondere al dilemma: tentativi che per i platonisti si sono congiunti allo sforzo di contrastare l'argomento di Benacerraf (1965).

Panza e Sereni assecondano la proposta di Hale e Wright (1992) di classificare le risposte al dilemma distinguendo fra risposte "conservative" e non. Le prime sono quelle che affrontano il dilemma frontalmente, condividendo le premesse di Benacerraf, e si inquadrano tutte, sia pure in modi diversi, nella tradizione del platonismo. Nel quarto capitolo gli autori prendono in considerazione alcune fra queste teorie, che ritengono particolarmente significative: il neologicismo di Hale e Wright, la *Object Theory* di Linsky e Zalta, lo strutturalismo non-eliminativo *ante rem* di Shapiro, la versione dello strutturalismo non-eliminativo di Parsons. Il quinto capitolo è dedicato alle principali risposte non conservative, ovvero che rigettano almeno una delle due condizioni poste da Benacerraf: il nominalsimo di Field, il finzionalismo, sia nella versione dello stesso Field che in quella di Yablo, lo strutturalismo eliminativo modale di Geoffrey Hellman e il platonismo a base empirista e cognitiva di Maddy.

Gli ultimi due capitoli sono interamente dedicati all'esposizione dell'argomento di indispensabilità (AI), generalmente attribuito a Quine e Putnam, anche se la prima formulazione esplicita si deve a (Putnam, 1971) e al dibattito che ha generato. Secondo AI siamo impegnati a riconoscere come entità legittime ciò che le nostre teorie scientifiche richiedono per i propri scopi (non solo la stessa matematica, ma anche, ad esempio, la fisica); in particolare l'accettazione degli enti numerici sarebbe una condizione necessaria per l'accettazione della verità della scienza. AI ambisce dunque a basarsi su considerazioni *a posteriori*, cioè dipendenti dallo sviluppo del sapere e dalle sue necessità, risultando così particolarmente congeniale a coloro che, specie se di impostazione empirista, bandiscono i ragionamenti *a priori* dal dibattito in ontologia. Uno degli aspetti che fanno di AI un argomento particolarmente potente è che promette di fornire una giustificazione per l'esistenza di oggetti matematici, o almeno per la verità di teorie matematiche, basandosi su premesse che sembrano accettabili anche per un nominalista, come la semplice constatazione che certe teorie matematiche intervengono nella formulazione di teorie scientifiche. Con l'esposizione di AI lo scopo è dare uno spaccato circostanziato della discussione in corso, facendo emergere, oltre ad un confronto fra le di-

[2] Cfr. (Benacerraf, 1965).
[3] Cfr. (Benacerraf, 1973).
[4] (Benacerraf, 1973), corsivo dell'autore.

verse opzioni filosofiche generali presentate in una forma più o meno compiuta, un lavoro di dettaglio, che mostra la filosofia all'opera su una problematica particolare.

Sviluppandosi intorno al contrasto tra realismo e antirealismo matematico e mostrando i pregi e i limiti di entrambe le impostazioni, *Il problema di Platone* riesce a presentare agilmente le principali correnti in filosofia della matematica, toccando abbastanza da vicino alcuni temi centrali nel dibattito novecentesco, come il tentativo di armonizzare il naturalismo con il carattere apparentemente non esperienziale della verità e della conoscenza matematica o come la ricerca di linguaggi formali che permettano un appello illimitato alle verità matematiche senza pesanti bagagli ontologici. Un pregio di questa introduzione relativamente voluminosa (360 p.) è il fatto che si presti ad una lettura parziale: per esempio, il lettore meno interessato agli sviluppi più recenti del dibattito può limitarsi alla lettura delle prime due parti; i capitoli successivi invece, mostrando esempi specifici e significativi del dibattito contemporaneo, sono un ottimo appoggio per chi volesse acquisire familiarità con la filosofia della matematica contemporanea e orientarsi nei suoi numerosi labirinti.

Benché il libro sia rivolto a chiunque sia attratto dall'idea di avvicinarsi alla materia, sono richieste, per una lettura seria, alcune conoscenze pregresse relative a discipline diverse, come la matematica stessa, la logica, la filosofia del linguaggio, ecc. Gli autori infatti, seppur cercando di strutturare la presentazione tenendo a mente il suo carattere introduttivo, non tendono a sacrificare la complessità degli argomenti per facilitare la comprensione al lettore inesperto. In questo modo la scorrevolezza risulta in certi punti ridotta, richiedendo uno sforzo in più da parte del lettore (sforzo che risulta senz'altro premiato da un'adeguata comprensione degli argomenti). La prefazione, con un paragrafo dedicato alle convenzioni terminologiche adottate, è indicativa dell'impegno degli autori per fornire una propedeutica alla lettura: vi si trova una distinzione tra semantica e sintassi, un richiamo alla nozione di teoria, di asserto, ecc.

Ovviamente il testo si offre come un valido strumento non solo per i filosofi, ma anche per i matematici. Alcuni filosofi della matematica considerano come loro compito quello di rendere conto della matematica e della pratica matematica così come si presentano, fornendo una loro interpretazione piuttosto che una loro critica. D'altra parte, le critiche possono avere ramificazioni importanti per la pratica matematica e quindi la filosofia della matematica può presentare un interesse diretto per il lavoro del matematico. Il breve panorama degli sviluppi della materia e delle attività di ricerca nella seconda metà del Novecento fornito nel *Problema di Platone* credo dia una prova sufficiente della continua vitalità della filosofia della matematica, del crescente interesse che essa suscita e della sua centralità nel dibattito contemporaneo.

Riferimenti bibliografici

Benacerraf, P. (1965). What numbers could not be. *Philosophical review*. 123, 124

Benacerraf, P. (1973). Mathematical truth. *The Journal of Philosophy*. 124

Hale, B. and C. Wright (1992). Nominalism and the contingency of abstract objects. *The Journal of Philosophy*. 124

Putnam, H. (1971). *Philosophy of Logic*. Harper and Row. 124