Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 © http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

I CONFINI LOGICI DELLA MATEMATICA

Giuseppe Ragunì

[Aracne Editore – Roma, 2010]

Giacomo Lini

Il valore limitativo che hanno alcuni teoremi, e metatoremi, nei confronti della matematica, è da considerarsi uno strumento molto potente a nostra disposizione. Affermare una serie di condizioni (per citarne alcune coerenza, completezza semantica, buona definizione. . .) relativamente a un sistema assiomatico formale consente di determinare quali siano i "limiti" di detto sistema. E le conseguenze epistemologiche che si possono trarre dal fatto che la matematica abbia dei limiti, contrariamente alla sua «aura dorata di inoppugnabile infallibilità»,[1] sembrano enormi, tanto da essere molto spesso chiamate in causa (a volte anche a sproposito). Il lavoro di Giuseppe Ragunì, dal titolo, appunto, de "*I Confini Logici della Matematica*", intende prendere in esame questi teoremi, da quelli di Gödel sull'incompletezza ai risultati di Chaitin sulla casualità, passando per la Tesi di Church-Turing, al fine di fare pulizia concettuale circa le conseguenze che ne derivano. E al contempo vuole costituirsi come un lavoro di natura introduttiva e divulgativa, adatto non solo ad un pubblico di "esperti" della materia, bensì anche a chi si interessa in maniera meno specifica alla Logica Matematica.

La sezione introduttiva, per chi persegue un tale duplice scopo, non può non essere quella di presentazione dei concetti fondamentali cui servirà fare ricorso: su tutti quelli di sistema assiomatico formale, di metamatematica, di teoria deduttiva, di coerenza e di completezza sintattica. Un discorso a parte merita invece, in questo contesto, la trattazione del tema relativo alla *distinguibilità* e alla *buona definizione*. Il primo termine viene introdotto per definire particolari tipi di insiemi, cioè quelli in cui, preso un qualsiasi elemento, sono in grado di stabilire se esso appartiene o meno all'insieme, attraverso una procedura matematica. Questa condizione, apparentemente identica a quella di *decidibilità*, se ne discosta per via del fatto di essere più debole. Per fare ulteriore chiarezza circa questo argomento, si consideri il seguente esempio: sia l'insieme A; sia dunque p_i la funzione che descrive il comportamento della procedura che consente di determinare se un certo elemento i appartiene o meno all'insieme. Nel caso di insiemi distinguibili si richiede che per ogni elemento del dominio di partenza esista una procedura (intuitiva o formale), che renda conto dell'appartenenza o meno dell'individuo all'insieme. Perché una collezione sia decidibile si impone invece che esista una procedura p che, preso un qualsiasi elemento del dominio, sia in grado di caratterizzare la sua presenza o meno nell'insieme A. Da qui segue la definizione di sistema ben definito: un sistema logico

[1] Ragunì (2010), p. 250.

AUTORE. Giacomo Lini. giacomo.lini8188@gmail.com

formale è ben definito se l'insieme delle proposizioni è *distinguibile*, i teoremi sono proposizioni di cui esiste almeno una dimostrazione e l'insieme delle dimostrazioni è una collezione *distinguibile* di stringhe finite di caratteri.

Nella seconda parte del lavoro, che consiste nella presentazione di alcuni importanti metarisultati relativi ai sistemi formali (correttezza e completezza semantica), Ragunì mostra come sia possibile mettere in luce «problemi e disaccordi circa alcuni principi semantico-logici usati in alcune metadimostrazioni»,[2] fatto questo, che rende interessante l'indagine sulla possibilità dell'assiomatizzazione tanto dei concetti che causano queste "incomprensioni", nello specifico quelli di modello e di insieme, quanto dei vari sistemi formali. La teoria che viene assunta in quest'opera di assiomatizzazione è TI (Teoria Assiomatica degli Insiemi): considerato un determinato sistema assiomatico classico (per convenzione SC), esso si dirà *rappresentabile* all'interno di TI a condizione che le regole grammaticali e le proposizioni (intese entrambe come collezioni) possano essere interpretabili come elementi della teoria TI: vale a dire come insiemi. Nello specifico la tecnica di rappresentazione consiste nella formalizzazione delle premesse del linguaggio L_{SC} del sistema all'interno del linguaggio L_{TI} della teoria degli insiemi. La semantica che fonda un determinato SC può essere separata tra la sua componente propria (relativa alle premesse caratteristiche di SC) e quella invece relativa al «particolare Calcolo predicativo classico formale del primo ordine su cui SC è basato».[3] Attraverso la formalizzazione di questi concetti è possibile affermare che l'unica condizione che impedirebbe di "trascrivere" un sistema SC in termini del linguaggio L_{TI} sarebbe la coesistenza tra la coerenza di SC e l'incoerenza di TI. Pertanto «la riduzione insiemistica impone che *l'unico linguaggio da usarsi in Metamatematica sia quello che, al più, fa riferimento al sistema matematico TI*»,[4] ed è ora possibile rappresentare i concetti di interpretazione, coerenza, modello (...) con un unico linguaggio e sotto un'unica formalizzazione. Ciò tuttavia, come sostiene l'autore, non può essere fatto senza pagare nessun prezzo: bisogna assumere la coerenza di TI stesso.[5]

Definito un linguaggio che consente di studiare all'interno di sé stesso le proprietà dei sistemi formali, Ragunì prende in considerazione le proprietà di questi sistemi per arrivare a caratterizzare, attraverso un'analisi delle cardinalità degli insiemi (un concetto formalizzato solo in TI, e che richiede quindi la rappresentazione del linguaggio L_S in quello della teoria degli insiemi), quelli che vengono chiamati i "numeri dei sistemi assiomatici classici": essendo rappresentabili in TI sistemi che hanno cardinalità di qualsiasi tipo (finita, infinita numerabile e più che numerabile), siamo costretti a rinunciare alla *Semantica di Henkin*, che considera solo sistemi formali, quindi numerabili, in favore della *Semantica standard*, che ammette l'analisi di sistemi più che numerabili (che l'autore chiama intrinsecamente semantici). Anche per quanto riguarda la metamatematica siamo in grado di caratterizzare il numero di espressioni dotate di significato: «La semantica si caratterizza per la sua capacità di denotare con un *signum* ogni ente o concetto che abbia un significato. [...] Anche "la collezione di tutte le espressioni semantiche" è un'espressione significativa.».[6] In virtù di questi ragionamenti è possibile affermare che «il numero di espressioni semantiche non è inferiore a nessuna cardinalità.»;[7] Ragunì propone per denotare questo numero (che non è da considerarsi un numero matematico) il termine *iperinnumerabile*. Queste considerazioni circa la

[2]Ragunì (2010), p. 75.

[3]Ragunì (2010), p. 83.

[4]Ragunì (2010), p. 89.

[5]È evidente infatti, che senza questa assunzione non saremmo in grado di formalizzare il linguaggio degli altri sistemi in TI.

[6]Ragunì (2010), p. 116.

[7]Ragunì (2010), p. 117.

cardinalità dei sistemi assiomatici e i numeri che servono per denotarle, che risultano spesso sconnesse e poco chiare al lettore, servono come premessa alla formalizzazione del teorema di completezza semantica all'interno di TI e alla valutazione delle sue conseguenze come la riducibilità del linguaggio di un sistema per cui vale il teorema al primo ordine (Teorema di Lindström), e le ripercussioni sul tipo di modelli della teoria per cui esso vale (che porta all'enunciazione del teorema di Löwenheim-Skolem).

La parte più ricca del lavoro di Ragunì, e più rilevante da un punto di vista scientifico, è la terza, quella relativa ai risultati di incompletezza e indecidibilità, i veri teoremi "limitativi" della matematica. Questa analisi non viene svolta dal punto di vista rigoroso e formale della dimostrazione degli enunciati, ma relativamente alla valutazione delle conseguenze più o meno giustificate, che ne sono state tratte. E lo scopo è, come detto in precedenza, e come precisato dall'autore in diversi passi, quello di sgombrare il campo da fraintendimenti. Viene riconsiderato il presunto valore indeterministico del primo teorema di Gödel, «infatti ogni enunciato indecidibile, in base al Teorema di completezza semantica, può essere riconosciuto mediante la considerazione di opportuni modelli del Sistema.».[8] Anche le presunte tesi di Chaitin sulla casualità nell'aritmetica Chaitin (1975) e Chaitin (1982), che prendono le mosse dall'estensione dell'incompletezza al campo dell'informatica sono oggetto di critica, con la riproposizione delle tesi già avanzate in Franzén (2005), dove si sostiene che il concetto di casualità sia una proprietà riguardante le stringhe di caratteri che solo per mezzo di particolari codificazioni si ripercuote sui numeri, ma non li interessa in via indipendente dall'arbitrio della codifica. L'ultima grossa tesi presente nel testo è relativa al secondo Teorema di Incompletezza, anch'esso spogliato del suo valore epistemologico: esso generalizza le conclusioni del primo Teorema, ma non afferma nell'interpretazione di Ragunì che se un sistema è coerente allora l'enunciato può essere concluso con il solo utilizzo del linguaggio di detto sistema .[9] Questa conclusione può essere tratta attraverso un risultato più generale che viene chiamato dall'autore *Metateorema di indimostrabilità della coerenza interna*. Indipendentemente dal nome che viene dato a questa conclusione, è interessante fare alcune osservazioni su TI alla luce dell'enunciato: in precedenza si è detto che la formalizzazione della matematica nella teoria degli insiemi non poteva essere fatta a meno di supporre la coerenza della teoria che vogliamo utilizzare come "contenitore"; alla luce del metateorema però dobbiamo fare i conti con l'impossibilità di dimostrare la coerenza di TI senza fare riferimento a linguaggi esterni a TI. Ammettendo un nuovo "contenitore" avremmo risolto il problema per la teoria degli insiemi, ma non avremmo guadagnato nulla in fin dei conti, perché la questione sulla coerenza sarebbe solo spostata ad un passo successivo, vale a dire al sistema all'interno del quale abbiamo descritto il linguaggio di TI.

Il lavoro di Ragunì risulta in definitiva inadatto ad entrambi gli scopi che si pone: come manuale di carattere introduttivo allo studio della Logica Matematica appare troppo confuso, specialmente nella seconda sezione, circa alcuni temi di carattere tecnico sui quali sarebbe bene essere più chiari (forse l'utilizzo maggiore del formalismo avrebbe dato una mano in tal senso); come lavoro scientifico, nella terza parte, risulta completamente slegato rispetto alle prime due parti del libro. E pur proponendo delle tesi (alcune valide, altre che lo sembrano molto meno), non sembra lanciarsi mai in una difesa di esse che va al di là della dimensione strettamente intuitiva.

[8] Ragunì (2010), p. 252.

[9] La tesi di Ragunì vuole criticare ad esempio Odifreddi (1994).

Riferimenti bibliografici

Chaitin, G. (1975). Casualità e dimostrazione matematica. *Le Scienze*. 137

Chaitin, G. (1982). Gödel's theorem and information. *International Journal of Theoretical Physics*. 137

Franzén, T. (2005). *Gödel's Theorem: an incomplete guide to its use and abuse*. A.K. Peters. 137

Odifreddi, P. (1994). Metamorfosi di un teorema. Disponibile all'indirizzo: http://www.itg-rondani.it/dida/Matem/ipermonica/logica/Storia/metamorf.htm. 137

Ragunì, G. (2010). *I Confini Logici della Matematica*. Aracne. 135, 136, 137