Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 1:2 (2011)
ISSN 2037-4445 http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

Il concetto di numero nella fondazione dell'aritmetica in Kant e Dedekind

Lucio Ruvidotti

Abstract. In this article we compare Kant and Dedekind position about foundation of arithmetic and concept of number. This paper is not focused on an exhausting presentation of these concepts and not even on a historical review. We want to show that Dedekind's approach towards the logical and mathematical foundation of arithmetics seems to be delegitimating if compared with the one of philosophical foundation as it's been conceived by Kant. Nonetheless, the foundation of arithmetics expressed by Kant, is clearly connected to the entire system of critics and assume a specific meaning that is wider than Dedekind ones. A logical clarification of arithmetics foundations does not deal with the question like the role of mathematics in the knowledge system and his relationship with empirical science. Moreover, it seems rightful to treat the problem within the frame of a philosophical research. In conclusion, we conclude with the proposal of a new evaluation of trascendental logic, in a weaker sense than the one originally intended by Kant, meant to be a philosophical discipline that tries to research refine such questions and possibly find responses for them. We present some considerations about the ontological status of numbers within the theories of Kant and Dedekind.

Keywords. Storia della Matematica, Kant, Dedekind, Filosofia dell'aritmetica

Autore. Lucio Ruvidotti: lucio.ruvidotti@studenti.unimi.it
Ricevuto. 20 Febbraio 2011 **Accettato**. 06 Marzo 2011

1 Introduzione

La filosofia della matematica kantiana e le ricerche sui fondamenti dell'aritmetica di Dedekind sembrano essere molto distanti tra loro, e non solo da un punto di vista cronologico. Da un lato una concezione della matematica strettamente vincolata ad un sistema filosofico e ad una posizione epistemologica, da un altro uno dei primi tentativi di derivazione dell'aritmetica in termini logico-matematici.

Ciononostante, se l'obiettivo è quello di chiarire il senso di una riflessione filosofica sulla matematica, sembra interessante confrontare le ricerche di questi due autori. Il lavoro di Dedekind libera il campo da tutti i tentativi prettamente filosofici di fondare la matematica, compreso quello trascendentale. Proprio questo risultato permette di rivalutare, isolandoli dalle problematiche fondazionali, alcuni problemi filosofici posti da Kant e legati al ruolo della matematica all'interno della conoscenza. Tali questioni - che infatti non trovano posto nelle ricerche dedekindiane – rimangono di legittimo interesse e possibile soluzione per la riflessione filosofica.

Nel primo paragrafo presenterò la costruzione dei naturali e la concezione dell'aritmetica di Dedekind.

Nel secondo illustrerò la proposta kantiana soffermandomi sulle motivazioni teoriche e tecniche di un tentativo di fondazione dell'aritmetica su un piano trascendentale.

Nel terzo confronterò brevemente le due posizioni da un punto di vista ontologico.

Nel quarto cercherò di valutare se vi sia ancora spazio, oggi, per una logica "trascendentale".

Alcune note tecniche in merito all'utilizzo della bibliografia.

Cercherò, dove possibile, di tradurre in forma logica alcune definizioni e teoremi dati da Dedekind nel suo scritto *Che cosa sono e a che cosa servono i numeri?*. Oggi tali nozioni possono essere definite in maniera molto più rigorosa ma, dare una formalizzazione della teoria degli insiemi, in accordo con studi più recenti, non è tra gli scopi di questo lavoro.[1]

Per quanto riguarda Kant: il mio proposito è quello di mettere il lettore nelle condizioni di inquadrare la sua posizione senza bisogno di fare ampio ricorso ai testi originali. Spiegherò il più possibile dettagliatamente le nozioni indispensabili per questo compito mentre altre, secondarie o difficilmente isolabili dalle argomentazioni kantiane, saranno lasciate da approfondire. A mio parere, per comprendere appieno la concezione di Kant, è necessario avere una buona conoscenza dei testi originali ma, per i fini di questo lavoro, spero che la mia semplificazione sia sufficiente.

2 Aritmetica e numero in Dedekind

> Io considero l'intera aritmetica come una conseguenza necessaria, o almeno naturale dell'atto aritmetico più semplice, quello di contare, il quale, a sua volta, non è altro che la creazione sequenziale della successione infinita dei numeri interi positivi, in cui ogni elemento è definito mediante l'elemento immediatamente precedente. L'atto più semplice è il passaggio da un elemento già creato all'elemento successivo, ancora da creare.[2]

[1] Per un'approfondita introduzione alla moderna teoria degli insiemi: Hrbacek and Jech (1999)

[2] J. W. R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872), trad. it. in Dedekind (1982), p.65

Questa affermazione introduce in modo significativo il programma di fondazione dell'aritmetica di Dedekind. Da un lato la definizione dei numeri viene connessa con l'atto intuitivo del contare, da un altro viene anticipato l'intento di svolgere una ricerca più astratta, da esplicitarsi nello studio delle relazioni tra generici elementi. Questi due aspetti, il primo di continuità con la tradizione, il secondo di discontinuità e apertura ai futuri sviluppi dell'algebra, rendono il lavoro di Dedekind ideale per rappresentare la trasformazione della concezione della matematica che avviene tra '800 e '900.
Il tentativo è quello di «erigere la scienza dei numeri sopra una base unica»[3] cioè fondare l'aritmetica sulla nascente logica-matematica, una logica relazionale munita degli strumenti di una "ingenua" teoria degli insiemi ancora non intaccata dal dramma dell'antinomia di Russell.
In questo paragrafo riporterò, per sommi capi, la costruzione dei naturali presente in *Che cosa sono e a che cosa servono i numeri?*. Per rimarcare le dipendenze logiche della costruzione partirò dalla definizione dei concetti logici base per arrivare alla definizione della struttura algebrica di $\mathbb{N}$ e alla sua dimostrazione. In questo modo seguirò l'approccio di Dedekind, innovativo per l'epoca, di introdurre preliminarmente la teoria logica per poi, solo in un secondo momento, definire i concetti matematici sulla base di quelli logici.
Il primo passo[4] è quello di introdurre il linguaggio e gli oggetti che esso denota: lettere minuscole dell'alfabeto latino *a, b, c, ...* stanno per cose, lettere maiuscole *A, B, C, ...* stanno per insiemi di cose. È importante sottolineare che Dedekind non si sta qui riferendo a delle cose in generale, egli intende per cosa ogni oggetto del pensiero. Viene quindi introdotto un principio di comprensione, riconducibile a quelli introdotti da Frege e Cantor; Dedekind non ne dà una formalizzazione, afferma semplicemente che: un insieme «essendo un oggetto del nostro pensiero, è a sua volta una cosa; esso è completamente determinato quando sia determinato, per ogni cosa, se esso è o no un elemento».[5] Si potrebbe però provare a formalizzarlo in questo modo: presa una qualunque proprietà P

$$\exists A, \forall B : B \in A \leftrightarrow P(B)$$

Quindi si introduce la relazione "essere parte di", che indicherò con il simbolo "$\subseteq$", la quale è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Ne segue anche la relazione "essere parte propria di" definita:

$$\forall A, \forall B : B \subset A \leftrightarrow B \subseteq A \land B \neq A$$

Dedekind non utilizza il simbolo "$\subseteq$", né dà una formalizzazione e un simbolo per la parte propria; inoltre, grazie all'intuitivo principio di comprensione che ha dato, può indicare che un individuo è *elemento di un insieme* utilizzando il medesimo simbolo che usa per "essere parte di". Tuttavia, per familiarità con l'uso contemporaneo, farò uso di "$\in$" per indicare che un individuo è elemento di un insieme - questo non cambia nella sostanza i risultati. A questo punto Dedekind introduce una serie di definizioni necessarie al suo scopo: la nozione di "insieme composto" (1), "parte comune" (2), "funzione" (3), "biiezione" (4).

1. Si dice *insieme composto degli insiemi* $A, B, C, ...$ e si scrive $M(A, B, C, ...)$ un insieme tale che, preso un qualsiasi S,
   $S \subseteq M(A, B, C, ...) \leftrightarrow (S \subseteq A) \lor (S \subseteq B) \lor (S \subseteq C) \lor ...$
   La nozione di "insieme composto" corrisponde all'unione di insiemi;

[3] J. W. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen* (1888), trad. it. in Dedekind (1982), p.82
[4] Non seguirò qui tutti i passaggi del testo di Dedekind, né darò tutte le definizioni, i teoremi e le dimostrazioni. Per approfondire rimando direttamente al testo.
[5] Dedekind (1982), p. 88.

2. si dice parte comune degli insiemi $A, B, C, ...$ e si scrive $G(A, B, C, ...)$ un insieme tale che, preso un qualsiasi S,
   $S \subseteq G(A, B, C, ...) \leftrightarrow (S \subseteq A) \wedge (S \subseteq B) \wedge (S \subseteq C) \wedge ...$
   La nozione di "parte comune" corrisponde all'intersezione di insiemi;

3. dati A e B si dice *funzione da A a B* una legge che associa ad ogni $a \in A$ uno e un solo elemento $a' \in B$. Chiamiamo $a' = \varphi(a)$ *immagine di a in B data dalla funzione φ*;

4. dati A e B si dice *biiezione da A a B* una funzione φ tale che per ogni $b \in B$ vi è uno e un solo $a \in A$ tale che $\varphi(a) = b$. Da ciò segue:

   (a) due insiemi si dicono *simili* se e solo se vi è una biiezione tra di essi.

Arrivati a questo punto le nozioni base di teoria degli insiemi necessarie per la costruzione dei naturali sono state date. Dedekind restringe il discorso al caso di funzioni in cui domino e codominio coincidono. Introduce l'insieme S[6] , la funzione fondamentale $\varphi : S \to Z$ e la sua immagine $\varphi(S) = S'$ in $Z \subseteq S$; poiché $S' \subseteq Z \subseteq S$, φ è una funzione di S in se stesso. Fatta questa premessa Dedekind vuole dare un ordine totale all'insieme S, per farlo utilizza la nozione di "catena":

> dati un insieme K e la funzione fondamentale φ, presa K' immagine di K mediante la funzione φ, K è una catena se $K' \subseteq K$.

Da questo segue che anche S è una catena. Inoltre presa $A \subseteq S$ chiamiamo A_0 la comunione di tutte le catene di cui A è parte. A_0 stessa è una catena e viene chiamata da Dedekind *catena dell'insieme A*. Con queste ultime due definizioni e con alcuni teoremi seguenti è possibile dare il teorema di induzione completa, essenziale per il procedimento di dimostrazione per induzione.

Teorema di induzione completa
$A_0 \subseteq \Sigma$ (dove Σ è un insieme generico) se:

1. $A \subseteq \Sigma$;
2. $\forall a : a \in A_0 \wedge a \in \Sigma, \exists a' : a' = \varphi(a) \wedge a' \in \Sigma$.

Manca solo un passaggio per arrivare alla definizione dei naturali, infatti si richiede che la serie dei numeri naturali sia infinita. Ma Dedekind non può basarsi su una nozione intuitiva di insieme infinito: deve dare una sua definizione sulla base delle nozioni fin'ora introdotte e deve dimostrarne l'esistenza.

- *64.Definizione.* Un sistema [insieme] S si dice infinito se è simile a una sua parte propria; nel caso contrario S si dice finito.
- *65.Teorema.* Ogni sistema che consiste di un unico elemento è finito.
  [...]
- *66.Teorema.* Esistono sistemi infiniti.[7]

È possibile ora definire l'insieme dei numeri naturali a partire dalla definizione di un insieme semplicemente infinito. Un insieme N si dice semplicemente infinito se esistono una funzione φ ed un elemento 1 che soddisfano le seguenti condizioni:

[6] Da questo punto in avanti S è considerato l'insieme più grande, ogni altro insieme introdotto sarà una parte di S

[7] Dedekind (1982), p. 98. Per la famosa dimostrazione del teorema 66: cfr. ivi, p. 99.

I $N' \subseteq N$;

II $N = 1_0$;

III $1 \notin N'$;

IV φ è una biiezione.[8]

1 è l'elemento fondamentale di N e si dice che l'insieme N è ordinato dalla funzione φ.
Possiamo infine dare la definizione dell'insieme dei numeri naturali riportando le parole di Dedekind stesso:

> Se in un sistema [insieme] N semplicemente infinito e ordinato da una rappresentazione φ si prescinde interamente dalla particolare natura dei suoi elementi, tenendo ferma soltanto la loro distinguibilità, e si considerano esclusivamente le relazioni reciproche determinate dalla rappresentazione ordinante φ, allora questi elementi sono detti *numeri naturali* o *numeri ordinali* o senz'altro *numeri*, e l'elemento fondamentale 1 è chiamato *numero fondamentale* della *serie numerica* N. [...] l'immagine n' di un numero n sarà [...] chiamata il *numero successivo* a n.[9]

Dedekind ha definito una struttura algebrica che potremmo indicare come $\mathbb{N} = \langle N, 1, ' \rangle$. Per farlo ha utilizzato gli strumenti della teoria degli insiemi: ha dato un dominio infinito di elementi - N; un elemento iniziale della serie che rispetta alcune proprietà specifiche – I, II, III, IV; una funzione successore. A partire da ciò Dedekind completa la sua costruzione dei naturali dimostrando per induzione completa i teoremi che riguardano la relazione "$<$" e le sue proprietà – tricotomia, transitività, etc.; quindi, facendo uso dei concetti di *massimo* e *minimo* di una serie, dimostra i teoremi sulle parti finite e infinite dell'insieme N; infine dà il *teorema della definizione per induzione* con il quale può definire le operazioni "$+$", "$\cdot$", "x^n". Non entrerò ora nei dettagli tecnici di questi risultati per i quali rimando al testo originale[10]. Quello che ora mi interessa sottolineare è il significato concettuale e tecnico del lavoro di Dedekind sulla definizione del concetto di numero in modo da poterla poi confrontare con quella di Kant.
Dedekind ha una precisa, anche se poco raffinata, posizione filosofica. «I numeri si possono giustamente chiamare una libera creazione dell'intelletto umano»[11], sono costrutti culturali creati dall'uomo esattamente come i più concreti tavoli, i viadotti, gli gnomi da giardino. Ciò che sta alla base di questa "creazione" è la struttura stessa della mente umana e delle sue funzioni. In quest'ottica la definizione dei naturali è concepita come una "ricostruzione", cioè una spiegazione di come effettivamente l'intelletto usa i suoi strumenti per creare i numeri. Ma qual è la spiegazione di questa possibilità della logica di "ricostruire" la creazione intellettuale dei numeri? Come descrive efficacemente Gana nell'introduzione all'edizione italiana degli scritti fondazionali, per Dedekind esistono due "facoltà creative" logiche umane: la facoltà di *mettere in relazione cose con cose* e quella di *creare* insiemi. Ora, lo studio delle relazioni e la teoria degli insiemi sono proprio le componenti della logica matematica di fine Ottocento. In questo senso, "ricostruendo" l'operare delle facoltà intellettive, la logica assume legittimamente il ruolo di una scienza del pensiero. Se si considera la definizione dell'insieme dei naturali all'interno di questo contesto, risulta chiaro che i numeri, essendo

[8] I, II, III, IV sono gli assiomi dell'aritmetica di Dedekind.
[9] Ivi, p. 101.
[10] Cfr. ivi, pp. 102-128.
[11] Ivi, p. 101.

oggetti del pensiero, possono essere "ricostruiti" solo nella forma di una derivazione logica.
È questo interesse per i problemi fondazionali dell'aritmetica che rende il lavoro di Dedekind filosoficamente interessante. La maggior parte dei matematici del tempo considerava la domanda "che cosa sono i numeri?" uno pseudo-problema, oppure si affidava, per spiegare il significato intuitivo degli oggetti matematici, a delle posizioni empiriste ingenue. Diversamente Dedekind dà al problema l'importanza che merita e propone, come risposta, una spiegazione logico-formale dell'operazione del contare. Non importa cosa siano in numeri nel concreto, importa che si possa dare – con gli strumenti rigorosi della logica matematica - una struttura generale di elementi regolata da una funzione successore. In altri termini: sebbene in aritmetica si faccia uso di specifici oggetti, i numeri, regolati da precise operazioni e relazioni, questo è possibile solo in virtù di una possibilità logica più generale, quella di disporre generiche cose in successione a partire da una cosa iniziale e passando alla successiva per mezzo di una precisa funzione.
Il risultato è importante: per la prima volta viene raggiunto, mediante una chiarificazione in termini logici, un risultato che normalmente veniva demandato alle speculazioni filosofiche - che fossero ingenue o raffinate - oppure addirittura considerato non richiesto.

3 Aritmetica e numero in Kant

È proprio questo risultato raggiunto da Dedekind - quello che potremmo chiamare "la formalizzazione della funzione di iterazione di un elemento" - che mi permette di aprire il discorso sulla filosofia della matematica di Kant e, nello specifico, sul concetto di numero e sull'essenza dell'aritmetica.
Se prescindiamo dalla specifica costruzione logica dei naturali di Dedekind ci rimane comunque un risultato da cui partire: è stato chiarito che per avere la serie dei numeri naturali è necessario spiegare come sia possibile il passaggio da un generico elemento ad un suo successore. Anche per Kant il problema del numero si specifica in questa questione più precisa; la soluzione sarà, però, d'altro tipo, e questo per due motivi.
1) Kant ha una concezione della logica profondamente diversa da quella di Dedekind, sia perché la logica alla fine del Settecento ancora non aveva iniziato quella rivoluzione che l'avrebbe resa, proprio nel periodo in cui scrive Dedekind, "logica-matematica", sia per un motivo teorico chiarito più sotto. La logica kantiana – che il filosofo chiama "generale" - è la logica chiamata tradizionalmente "formale". Derivata, anche se per molti aspetti diversa, dalla sillogistica categorica aristotelica e considerata da Kant un canone chiuso e immodificabile, non comprende lo studio delle relazioni e la teoria degli insiemi. Con questi presupposti se anche Kant avesse voluto spiegare la funzione *successore* in termini logici gli sarebbero mancati gli strumenti.
2) Oltre al limite storico-tecnico c'è un motivo teorico-filosofico, in quanto la fondazione dell'aritmetica si inserisce nel più ampio contesto della filosofia critica. Kant sostiene che l'intelletto umano conosce in quanto impone una forma categoriale alla materia sensibile e che vi sono delle conoscenze sintetiche a priori sulle quali fondare la conoscenza in generale. La matematica, all'interno di questa concezione, ricopre un ruolo importante poiché costituisce il ponte tra l'esperienza e la conoscenza: da un lato è una disciplina che procede per costruzione di concetti, i quali sono un prodotto della *spontaneità dell'intelletto*, da un altro la sua applicazione permette la misurazione dei fenomeni, le rappresentazioni dei quali vengono recepite dalla *sensibilità*. Ma è possibile che la matematica faccia ciò solo se è in grado di produrre conoscenze sintetiche a priori, quindi, nello specifico, se può rappresentare a priori

un'intuizione corrispondente ad un concetto. Allora, dall'apriorità della matematica, segue, per Kant, la necessità della sua giustificazione ad un livello trascendentale.[12] Questo fatto, inoltre, chiarifica perché la matematica non possa avere una fondazione logica. Infatti, se la logica generale non è in nessun modo legata all'intuizione, come potrebbe costituire la base per la fondazione di una disciplina sintetica?
Ora, fatte le opportune premesse, cercherò di spiegare quali siano i passaggi della fondazione dell'aritmetica[13] kantiana. Si tratterà di capire che cosa sia e in cosa consista il procedimento matematico per costruzione e che ruolo abbiano, in esso, i concetti trascendentali[14] di *grandezza, concetto matematico* e *schema trascendentale*. Alla fine di quest'analisi dovrebbe apparire chiaro cosa sia, per Kant, un numero.

Il punto di partenza è quello di considerare la dicotomia sensibilità-intelletto specificata nella domanda: "com'è possibile l'aritmetica in quanto disciplina che associ numeri a grandezze?"
Kant distingue due tipi di grandezze, *quantum* e *quantitas*. Il primo è un termine particolare che denota una grandezza empirica specifica, concreta, mentre il secondo è un termine generale che sta per il concetto di grandezza (quantità) o, più nello specifico, il concetto di una cosa in generale attraverso la determinazione della grandezza. Lasciando per ora da parte la *quantitas* - e semplificando molto le cose[15] - potremmo dire che i *quanta* sono ciò che si va a misurare di un oggetto quando se ne fa, appunto, una misura.
Da questa specificazione del concetto di grandezza risulta che il problema da prendere in considerazione sembra essere quello della possibilità di associare un numero ad un *quantum* e di come ciò sia possibile per principio – non ci si sta chiedendo come svolgere concretamente una misura. In realtà è ancora troppo presto per parlare di "numero" nel senso kantiano del termine. Con "numeri" ho inteso fin qui quelli che noi, oggi, considereremmo numeri - cioè gli oggetti dell'aritmetica - e che per Kant sarebbero invece "concetti matematici". Un concetto matematico è un concetto, quindi una rappresentazione prodotta dalla spontaneità dell'intelletto, che deve rispettare alcune condizioni. La prima condizione, necessaria ma non sufficiente, è che deve essere non-contradditorio: per questo controllo è sufficiente la logica generale che determina quindi la *possibilità logica* del concetto. La seconda condizione è invece quella che circoscrive la *possibilità reale*, cioè se il concetto in questione si riferisca ad un oggetto conoscibile.
Ricapitolando: quello che si sta cercando di fare è, con un artificio metodologico[16], considerare come già dati, da un lato, i *quanta*, e da un altro, i concetti matematici, per stabilire la possibilità dell'associazione dei secondi ai primi rilevando in quali casi i concetti matematici abbiano una *possibilità reale*.
La questione della "possibilità reale" è cruciale. Un concetto matematico ha *possibilità reale*

[12]«Chiamo trascendentale ogni conoscenza che si occupi, in generale, non tanto degli oggetti quanto del nostro modo di conoscere gli oggetti nella misura in cui questo deve essere possibile a priori.», in I. Kant, *Kritik der reinen Vernunft* (1781, 1787), trad. it. in Kant (2005), A11/B25

[13]Mi riferisco all'aritmetica presa in considerazione da Kant per la sua fondazione, comprensiva anche di quella che lui chiama "aritmetica generale" o "algebra". Sarebbe fuorviante intendere con questi termini l'aritmetica e l'algebra così come le intendiamo oggi, cioè come teorie su un dominio specifico di oggetti.

[14]Intendo con "concetti trascendentali" quei concetti che Kant introduce per spiegare una nozione a livello trascendentale.

[15]In una prospettiva kantiana non ha molto senso parlare di oggetti che ci sono indipendentemente da noi – in questo caso le "grandezze" da misurare. È necessario però, come fa lo stesso Kant, introdurre concetti di questo tipo da un punto di vista metodologico per poi ritornare a considerarli avendo chiara la prospettiva più generale in cui sono inseriti.

[16]Questo è un artificio metodologico perché, come vedremo, non si danno concetti matematici privi di possibilità reale.

se e solo se è *costruibile* ed è costruibile se e solo se è possibile rappresentarne a priori la corrispondente *intuizione pura*. Il ruolo di spiegare questo passaggio spetta alla nozione di "schema trascendentale". Lo schema trascendentale è un particolare tipo di rappresentazione che, generata dall'*immaginazione produttiva*[17], costituisce un termine medio tra le rappresentazioni intellettuali, i concetti, e quelle sensibili, le intuizioni. In quanto "trascendentale" dovrà essere una rappresentazione priva di elementi empirici, quindi pura. Funzione dello schema è quella di mediare la *sussunzione* dei fenomeni sotto le *categorie*, come scrive Kant, infatti:

> una determinazione trascendentale di tempo [uno schema trascendentale] è omogenea alla categoria (che ne determina l'unità) in quanto è universale e riposa su una regola a priori; per un altro verso, però, è omogenea al fenomeno, in quanto il tempo è incluso in ogni rappresentazione empirica del molteplice.[18]

Si può considerare uno schema trascendentale come una regola che, dato un concetto, indica come produrre immagini per esso. Uno schema non è esso stesso un'immagine: in questo caso esso sarebbe un'esemplificazione empirica specifica di un concetto. Diversamente, quello che si richiede ad uno schema è che permetta di ricondurre tutte le immagini empiriche e singolari che si possono associare ad un concetto ad un'unica "immagine" a priori - un'immagine, quindi, che si riferisca alla sola *forma* di un fenomeno o, in altre parole, a quanto è dato del fenomeno esclusivamente in un'intuizione pura. Lo schema è la regola che permette ciò.

Ora, stringendo la questione intorno al problema dell'aritmetica, mi sembra utile precisare il concetto di schema trascendentale in due concetti più specifici, li chiamerò "n" e "s".

n è lo schema matematico di un numero specifico. Per fare un esempio, prendiamo il concetto matematico "7": "i nani di Biancaneve di terracotta del giardino del vicino" sono un'immagine di questo concetto, allo stesso modo è un'immagine di esso "le braccia della *Menorah*[19]", così come i puntini scritti qui di seguito "......." - per usare un'immagine più tradizionale. Ecco, n costituisce la regola che permette di associare univocamente qualunque immagine del "7" al concetto matematico "7".

Diversamente s è lo *schema puro della quantità*. In altre parole esso è lo schema trascendentale del concetto di quantità o, meglio, della *quantitas*. In quanto tale s è la regola della formazione di ogni n.

Ma come si inserisce la nozione di schema nel quadro, delineato sopra, che vede la necessità di associare un concetto matematico ad un *quantum*? La regola di questa associazione è precisamente n. Perseverando nella nostra finzione metodologica potremmo dire che se esiste uno schema numerico per un concetto matematico allora il *quantum* in questione è associato al concetto numerico stesso o, in altre parole, lo schema determina la *possibilità reale* del concetto. Al di fuori dalla finzione: il concetto matematico è *costruito* a partire da un n specifico per poter denotare univocamente il *quantum*. In tale concezione n è un numero.

Questo però non basta. Infatti, per ora, si è data solo un'indicazione di cosa possa garantire l'associazione tra un concetto numerico e un *quantum* in un contesto specifico, mentre quello che serve è una giustificazione generale. Per questo scopo è fondamentale s, il quale, costituendo la regola di formazione di ogni numero, giustifica il procedimento costruttivo kantiano dei concetti numerici. Esso, nella fondazione kantiana, prende il posto della "funzione generale di iterazione di un elemento" di cui sopra. Ma vediamo la cosa più nel dettaglio.

[17]Non c'è spazio, in questa sede, per approfondire il ruolo della facoltà dell'immaginazione kantiana. Rimando per una trattazione dettagliata e originale sull'argomento a: Palumbo (1985)

[18]Kant (2005), pp. A138,139/B177,178.

[19]Candelabro tradizionale ebraico.

«Lo schema puro della quantità (*quantitatis*), in quanto concetto dell'intelletto [...] - secondo Kant - consiste in una rappresentazione abbracciante la successiva addizione di uno a uno (omogenei).»[20]. Si potrebbe dire che s è un'operazione che applica la *quantitas*, composta delle tre categorie di *unità*, *pluralità*, *totalità*, al tempo – inteso, kantianamente, come intuizione pura o forma del senso interno. Concretamente avviene che s costruisce una serie completa (applicando la *totalità*) che parte da un'unità (applicando l'*unità*) e la itera (applicando la *molteplicità*) in modo che ogni elemento sia il successore di quello ad esso precedente (grazie alla temporalità).[21] s è, quindi, una "funzione generale di iterazione di un elemento" che, nel caso della fondazione dei naturali, ha un ruolo analogo a quello della funzione successore ('). Ma fondare l'aritmetica a partire da s permette a Kant di giustificare l'associabilità di un concetto matematico ad un *quantum*: posta come unità una grandezza arbitraria - un *quantum* preso come unità di misura – e associato ad essa il concetto matematico "1", si può iterare tale unità a piacere fino a raggiungere qualsivoglia *quantum*; quest'ultimo, a sua volta, è associato ad un concetto numerico costruito nello stesso modo a partire dall'1.

Il risultato raggiunto risulta però problematico ai fini della funzionalità dell'aritmetica stessa. Una funzione successore così definita può essere applicata soltanto per un numero finito di passi poiché è in grado di iterare grazie a un'*intuizione della forma del tempo* fatta dalla *sensibilità* in quanto *facoltà* umana, quindi finita. Il fatto che questa operazione si possa applicare solo finitamente permette di *costruire* esclusivamente i numeri naturali, i razionali e una buona approssimazione dei reali; i numeri complessi vengono addirittura considerati impossibili.

Sarebbe arduo, in questo breve lavoro, riuscire a spiegare il perché di questo risultato mancato.[22] Inoltre tale problema non intacca né la fondazione della matematica presa nella sua interezza - compresa la geometria – né il sistema criticista kantiano poiché, nella prospettiva di Kant, le grandezze che non sono costruibili aritmeticamente possono esserlo geometricamente. Non mi ci soffermo, ma facendo per la geometria un'analisi simile a quella fatta fin'ora per l'aritmetica, è possibile mostrare come sia garantito, almeno per i numeri reali, che «la conoscenza matematica - aritmetica e geometrica assieme – [sia] conoscenza razionale per costruzione di concetti» dove «costruire un concetto significa rappresentar[ne] a priori la corrispondente intuizione [...] non empirica.»[23] Ad ogni modo, riportando l'esempio di un problema specifico, cercherò, da un lato, di rendere più chiaro questo limite della fondazione dell'aritmetica kantiana, da un altro, di fare il punto sul significato del procedimento per *costruzione*.

L'esempio è preso da un problema posto a Kant da A. W. Rehberg in una lettera del settembre 1790[24] e riguarda, appunto, il problema dei numeri irrazionali. Io non riporterò qui la trattazione completa[25] comprensiva delle osservazioni di Rehberg e della risposta di Kant,

[20] Kant (2005), p. A142/B182

[21] Si potrebbe anche provare a generare i singoli n. Ipotizziamo che essi siano dei numeri naturali intesi come cardinali: l'unità di partenza è l'1, mediante il tempo si itera e si ha $1 + 1$, cioè una molteplicità che, considerata come totalità è il 2. Ripetendo il processo si può costruire l'intera serie dei naturali. Vedi anche Moretto (1999), pp.207-248

[22] Vedi Moretto (1999), pp.207-248

[23] Kant (2005), p. A713/B741.

[24] La nota bibliografica che segue è riportata in Moretto (1999), p. 230. «I. Kant, *An August Wilhelm Rehberg* [Vor d. 25. Sept. 1790], in *Briefwechsel*, Band II, *Brief* Nr. 448. Di questa lettera esistono due abbozzi (*Nachlaß*, Band I, *Rfl.* Nrn. 13, 14. Con questa lettera Kant risponde alla lettera di Rehberg (*Von August Wilhelm Rehberg* [Vor d. 25. Sept. 1790], in *Briefwechsel*, Band II, *Brief* Nr. 447, pp. 205, 206 [GS, Band XI]). Per la traduzione italiana della lettera di Kant e dei due abbozzi si veda I. Kant, *Epistolario filosofico 1761-1800*, trad. di O. Meo, Genova, Il melangolo, 1990, pp. 236-245; nelle note viene proposta una traduzione parziale [...] della lettera di Rehberg.»

[25] Rimando a Moretto (1999), pp. 230-241; Friedman (1992), pp. 110-112; Palumbo (1985), p. 79.

mi limiterò ad usare il problema per dare un esempio di quali siano i limiti dell'aritmetica kantiana e come vengano colmati nella prospettiva kantiana stessa.
Prendiamo il concetto matematico $\sqrt{a}$ per $a \in \mathbb{Q}$,$a > 0$. $\sqrt{a}$ è definito su $\mathbb{R}$ per ogni $x > 0$ tale che $x^2 = a$. Da come è definita la radice di un numero positivo, per $a = 2$ il concetto $\sqrt{2}$ ha *possibilità logica*. Che questo concetto abbia anche *possibilità reale* non è però scontato. Se infatti ci si pone il problema della rappresentabilità di un'intuizione pura corrispondente a tale concetto dal punto di vista aritmetico, ci si rende conto di come non si possa assegnare una *possibilità reale* a $\sqrt{2}$. Infatti questo concetto può essere rappresentato solamente dalla serie infinita

$$1 + \tfrac{4}{10} + \tfrac{1}{100} + \tfrac{4}{1000} + \tfrac{2}{10000} + ...$$

cioè, come spiega efficacemente Moretto[26]: «la grandezza può venir rappresentata con questa sequenza potenzialmente infinita di limitazioni bilatere [. . .]:

$$\begin{array}{rcccl} 1 & < & \sqrt{2} & < & 2 \\ 1,4 & < & \sqrt{2} & < & 1,5 \\ 1,41 & < & \sqrt{2} & < & 1,45 \\ 1,414 & < & \sqrt{2} & < & 1,415 \\ 1,4142 & < & \sqrt{2} & < & 1,4143 \\ ... & < & \sqrt{2} & < & ... \text{»} \end{array}$$

Il problema, come ho rilevato sopra, è che, se si considera la serie come *attualmente* infinita, allora il concetto $\sqrt{2}$ non ha *possibilità reale*; se invece la si considera *potenzialmente infinita*, essa è solamente un'approssimazione all'infinito di $\sqrt{2}$ che, ad ogni modo, non assegna una *possibilità reale* al concetto. È però possibile costruire geometricamente la grandezza $\sqrt{2}$. Infatti, preso un quadrato di lato 1, la diagonale di tale quadrato misura precisamente $\sqrt{2}$ e ciò è dimostrabile con il teorema di Pitagora a partire dagli assiomi della geometria euclidea. In questo caso è uno schema geometrico che assicura la corrispondenza tra una grandezza spaziale e un concetto geometrico.
Riassumendo: la matematica, per Kant, è una disciplina o, meglio, una forma di argomentazione, che procede per *costruzione* di concetti. In un certo numero di casi tali concetti possono essere costruiti aritmeticamente e si riferiscono a grandezze generiche, in altri essi vengono costruiti geometricamente e la loro rappresentazione è una grandezza spaziale. Si possono dare i seguenti casi: che un concetto matematico possa essere costruito sia aritmeticamente che geometricamente; che la costruzione geometrica supplisca alla mancanza di una costruzione aritmetica; che una costruzione non sia possibile, in quest'ultimo caso il concetto è solo pensabile – ha *possibilità logica* ma non *reale*.

4 Alcune considerazioni a livello ontologico

Ho cercato, nei paragrafi precedenti, di presentare la fondazione dell'aritmetica di Kant e Dedekind per fare luce sul significato e il ruolo del concetto di numero all'interno di queste due prospettive. Nel farlo sono partito dal lavoro dei due autori - analizzando i testi originali e alcuni commenti critici - e ho cercato di rimanere all'interno della loro concezione. Quello che potrebbe essere interessante, ora, è fare un tentativo di valutazione delle implicazioni ontologiche dei risultati presentati, dall'esterno. In questo modo, a prezzo di una semplificazione

[26](Moretto, 1999, p.238)

del pensiero di Kant e Dedekind, mi aspetto di poter considerare le due proposte astraendo dal contesto storico in cui sono inserite. Prese le due teorie dell'aritmetica presentate sopra – chiamiamole D-aritmetica e K-aritmetica - la domanda a cui voglio tentare di rispondere è: in tali teorie i numeri *esistono*?

Vorrei affrontare il problema utilizzando due diversi criteri, (a) e (b), per la valutazione dello statuto ontologico dei numeri in D-aritmetica e in K-aritmetica:

(a) l'esistenza dei numeri deve essere valutata a partire dalla concezione filosofica dell'autore interessato intesa come teoria di sfondo;

(b) l'esistenza dei numeri deve essere valutata rendendo espliciti gli impegni ontologici della teoria stessa; essi sono stimati sulla base della quantificazione esistenziale o delle dimostrazioni di esistenza.[27]

L'utilizzo del primo criterio richiederà di rispondere preventivamente alla domanda "che tipo di cose sono i numeri?" per poi stabilire in un secondo momento se questi tipi di cose esistano. Diversamente con il secondo criterio la domanda si declina nell'accezione "quali numeri esistono?".

Iniziamo con la D-aritmetica.

(a) Analizziamo l'affermazione di Dedekind che i numeri sono «una libera creazione dello spirito umano».[28] Con "spirito umano" l'autore intende la mente umana, in senso psicologico. Come ho già accennato, Dedekind crede nell'esistenza di alcune facoltà psicologiche innate: quelle interessate nella creazione dei numeri sono la *facoltà di operare inferenze elementari* e la *facoltà di creare insiemi e funzioni*.[29] Si potrebbe dire che la logica-matematica di Dedekind, cioè la teoria degli insiemi, sia la ricostruzione formale di queste facoltà della mente umana. "Libera" significa "non-necessaria". Si vuole qui sottolineare che i numeri non sono degli elementi primitivi ma piuttosto dei costrutti complessi, cioè delle *cose* la cui sussistenza dipendente da altre *cose*, queste sì, semplici. Per quanto riguarda la "creazione": si è visto come la D-aritmetica sia una teoria assiomatica i cui assiomi sono introdotti a partire da nozioni logico-matematiche. Ma se gli insiemi – le nozioni logico-matematiche che sono alla base della D-aritmetica – sono delle creazioni di una facoltà umana, allora i numeri - costruiti a partire dagli insiemi – sono essi stessi delle *cose* del pensiero. In altri termini: gli insiemi sono delle *cose* che il pensiero crea in virtù di una sua capacità innata; i numeri sono dei particolari tipi di insiemi;[30] i numeri sono delle *cose* del pensiero.

Ci si chiede allora: i numeri, intesi come "cose del pensiero" o "pensieri", esistono? La risposta è sì, in quanto Dedekind, dopo aver dimostrato[31] l'esistenza di almeno un insieme infinito S – la totalità di tutte le cose che possono essere oggetto del pensiero – dimostra[32] che esiste almeno un insieme semplicemente infinito $N \in S$ che è chiamato insieme dei numeri naturali

[27] Considero (b) come una sorta di liberalizzazione del criterio dell'impegno ontologico quineano; infatti, nel caso della K-aritmetica, che non è una teoria formalizzata nella logica del primo ordine con la teoria della quantificazione, non avrebbe senso applicare il motto "essere è essere il valore di una variabile" che costituisce, appunto, un'interpretazione a livello ontologico dell'applicazione del quantificatore esistenziale. Per un approfondimento sull'impegno ontologico quineano: cfr. W. V. O. Quine, *On What There Is* (1948), trad. it. in Quine (2004)

[28] Dedekind (1982), p. 101

[29] Che poi è lo stesso dato che, come fa lo stesso Dedekind, le funzioni possono definirsi in termini insiemistici.

[30] Si potrebbe dire che i numeri sono gli elementi di un insieme, ma, per il principio di comprensione non ristretto dato da Dedekind, insiemi ed elementi di un insieme si trattano allo stesso modo e di fatto non sono distinguibili come tipologie diverse di *cose*.

[31] Cfr. Dedekind (1982), pp. 98, 99.

[32] Cfr. ivi, pp. 101, 102.

e i cui elementi sono, appunto, i numeri naturali.
Bisogna sottolineare, e ciò complica non poco le cose, che la dimostrazione dell'esistenza di S infinito è caduta nelle critiche di Frege, il quale rilevò che se si intende che un "pensiero" sia "una cosa pensata da una mente umana", allora, poiché una mente umana esiste per un tempo finito, segue che la totalità dei pensieri non può che essere finita. Dedekind sembra non prendere neppure in considerazione questo problema. Il motivo può forse essere il fatto che il suo obiettivo non è, in effetti, quello di definire l'esistenza di un *infinito attuale*. Ciò che importa a Dedekind è che con la dimostrazione dell'esistenza di S e di N viene garantita la coerenza degli assiomi I, II, III, IV.[33]
Quanto detto riguardo alla natura e all'esistenza dei numeri naturali vale anche per i numeri razionali e reali, i quali sono costruiti da Dedekind a partire dai naturali.[34] Si può quindi affermare che, secondo la concezione dedekindiana dell'aritmetica, i numeri esistono in quanto oggetti del pensiero e la loro esistenza è dipendente rispetto ad alcune facoltà innate della mente umana.
(b) La D-aritmetica è una teoria assiomatica. Gli assiomi di questa teoria –I, II, III, IV- tradotti in linguaggio formalizzato si presentano come degli assiomi esistenziali. Poiché la D-aritmetica quantifica esistenzialmente su numeri i numeri esistono. Immediata conseguenza di ciò è il fatto che, qualunque insieme numerico definito coerentemente agli assiomi dati esiste – oltre a $\mathbb{N}$ anche $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ etc.
Vediamo ora la K-aritmetica.
(a) Può sembrare semplice rispondere alla domanda riguardo a che tipo di cose siano i numeri in Kant: se il numero è lo *schema trascendentale* della quantità e gli schemi trascendentali sono *rappresentazioni*, i numeri sono anch'essi delle *rappresentazioni*. Ma ha senso, all'interno della prospettiva kantiana, porsi la domanda "esistono i numeri in quanto rappresentazioni?" Trovo che il tentativo di considerare la questione in questi termini porti ad una banalizzazione eccessiva della ricerca kantiana. Il lavoro di Kant, a differenza di quello di Dedekind, non si prefigge lo scopo diretto di fondare l'aritmetica, né di dare una chiarificazione del concetto di numero. Inversamente, tali risultati sui fondamenti della matematica sono ricercati, da Kant, in quanto necessari per giustificare il sistema criticista. In altre parole: la possibilità della conoscenza dipende (anche) dalla fondazione trascendentale della matematica. All'interno della prospettiva kantiana la domanda ontologica risulta sensata solo se riferita agli oggetti dell'esperienza possibile: solo i fenomeni, in quanto oggetti della conoscenza, esistono. Da questo non si può neppure inferire, però, che le *rappresentazioni* non esistono. Questa affermazione, dal mio punto di vista, non ha senso. Sarebbe come chiedersi se, data la formula $\exists x : P(x)$ esistano il quantificatore esistenziale "$\exists$" e la relazione unaria "P"[35]. "Rappresentazione", "categoria", "schema trascendentale", ecc. sono tutti concetti introdotti ad un livello trascendentale, concetti, cioè, che hanno significato solo all'interno di un discorso sulla conoscenza in quanto è possibile a priori.
Quindi, in base alle richieste del criterio (a), risulta insensato dare una risposta alla domanda "esistono i numeri?".
(b) La K-aritmetica non è né una teoria assiomatica né è suscettibile di formalizzazione. Di fatto si tratta di una fondazione prettamente filosofica dell'aritmetica. Si può fare però un tentativo nella direzione di dividere i concetti matematici in (1) impossibili, (2) possibi-

[33]Per approfondire la questione vedere l'introduzione di F. Gana agli scritti fondazionali di Dedekind in Dedekind (1982), pp. 11-58.
[34]Dedekind (1982), pp. 61-78.
[35]Solo McX potrebbe porsi seriamente questa domanda.

li logicamente ma impossibili realmente, (3) possibili logicamente e possibili realmente in quanto costruiti geometricamente, (4) possibili logicamente e possibili realmente in quanto costruiti aritmeticamente. (3) e (4) sono i numeri che esistono. In altre parole, si usa un criterio "costruttivista" per cui esistono solo quei numeri la cui esistenza si può dimostrare *per costruzione* – nel senso kantiano, visto sopra, di "costruzione". Nella K-aritmetica, non comprensiva della geometria kantiana, esistono quindi solo numeri naturali e razionali.

5 C'è ancora spazio per una logica trascendentale?

Le fondazioni dell'aritmetica presentate, quella di Kant e quella di Dedekind, risultano diverse sotto vari aspetti strettamente legati fra loro: gli obiettivi a cui i due autori mirano, gli strumenti che utilizzano, i risultati tecnici che raggiungono. Il nocciolo della questione, in ogni caso, sta nella diversa concezione della logica che fa da sfondo a D-aritmetica e K-aritmetica.

Da un punto di vista tecnico la K-aritmetica viene superata dalla D-aritmetica. Lo schema puro della quantità kantiano, definito filosoficamente come concetto trascendentale, non ha la potenza espressiva della funzione successore dedekindiana. Dedekind mostra, senza ombra di dubbio, che è fuorviante e insensato fondare l'ordine dell'insieme dei naturali su un aspetto temporale. Il fatto che $\mathbb{N}$ sia la struttura algebrica $\langle N, 1, ' \rangle$ non ha nulla a che vedere con la "forma del senso interno". Si può dire che la logica-matematica, intesa come un notevole ampliamento della *logica generale*, costituisce l'unico strumento sensato col quale fondare la matematica. Non vi è più spazio, dopo Dedekind, per una fondazione "filosofica" dell'aritmetica o della matematica in generale.

Però, una volta che si amplia la *logica generale* fino a renderla logica-matematica, non si esaurisce il compito che, secondo Kant, spetta alla *costruzione* matematica. Infatti, per Kant, fondare la matematica significa anche spiegare perché la conoscenza degli oggetti è data dalla fisica in quanto disciplina che formula teorie in *linguaggio matematico*. «Che i nostri concetti debbano riferirsi a intuizioni significa quindi che essi debbono riferirsi alla *fisica matematica* e dimostrarsi fecondi nella sua costruzione. I concetti logici e matematici [...] hanno la loro funzione e *applicazione* legittima unicamente all'interno della *scienza empirica*.»[36] In altri termini, se il progetto kantiano risulta decisamente ridimensionato, in quanto lo sviluppo storico della logica e della matematica hanno delegittimato la pretesa di una fondazione filosofica di queste stesse discipline, ciononostante sembra legittimo continuare a porsi le domande: "perché la matematica è applicabile alla realtà?" "Perché la matematica costituisce il linguaggio privilegiato della conoscenza in quanto scienza?" Queste, per il logico e il matematico, sono spesso considerate delle formulazioni di pseudo-problemi - e infatti, dare una risposta a tali quesiti non aiuta in alcun modo il lavoro del matematico. Ma per il filosofo queste possono essere domande legittime. Una *logica trascendentale* liberalizzata, intesa come una teoria filosofica che argomenti una risposta a queste domande, è un tentativo concepibile. Essa darebbe *una* delle possibili spiegazioni filosofiche di questo problema.

Per riassumere, e concludere, con una citazione:

> Nessuno potrà tentare, per ragioni filosofiche, di porre dei limiti alla libertà della matematica, che è condizione della sua fecondità. E tuttavia la *critica della conoscenza* inizia solo con quella domanda che il matematico non conosce e non ha

[36] Cassirer and Couturat (2009), p. 135

bisogno di conoscere. Il suo vero e proprio problema non è tanto il contenuto dei principi matematici, quanto il ruolo che essi giocano nella costruzione del nostro concetto di una realtà "oggettuale". Lo sguardo della filosofia – se si vuole esprimere questo rapporto in modo un po' stridente e paradossale – non deve essere rivolto né alla matematica né alla fisica; esso si rivolge unicamente alla connessione dei due ambiti. Sarebbe inutile bandire questo problema come "metafisico" dai confini della matematica e della logistica. Infatti così verrebbe di nuovo soltanto provato che entrambe non possono portare a compimento il complesso sistematico delle questioni fondamentali irrinunciabili: dopo tutto qui non abbiamo in alcun modo a che fare con un oggetto *trascendente*, ma solo con la certezza oggettiva della nostra conoscenza empirica stessa. Tanto poco, quindi, la filosofia critica può limitare il diritto della logistica alla derivazione e formulazione autonoma dei principi matematici, quanto poco si aspetterà da essa la soluzione definitiva alle proprie difficoltà.[37]

[37] Ivi, p. 141.

Riferimenti bibliografici

Cassirer, E. and L. Couturat (2009). *Kant e la matematica (1904-1907)*. Angelo Guerini e Associati. trad. it. di C. Savi. 12

Dedekind, J. W. R. (1982). *Scritti sui fondamenti della matematica*. Bibliopolis. trad. it. di F. Gana. 1, 2, 3, 10, 11

Friedman, M. (1992). *Kant and the exact sciences*. Harvard University Press. 8

Hrbacek, K. and T. Jech (1999). *Introduction to Set Theory (Third Edition, Revised and Expanded)*. Marcel Dekker Inc. 1

Kant, I. (2005). *Critica della ragion pura*. UTET. trad it. di P. Chiodi. 6, 7, 8

Moretto, A. (1999). *Dottrina delle grandezze e filosofia trascendentale in Kant*. Il Poligrafo. 8, 9

Palumbo, M. (1985). *Immaginazione e matematica in Kant*. Laterza. 7, 8

Quine, W. V. O. (2004). *Da un punto di vista logico*. Cortina. trad. it. di P. Valore. 10