Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior
Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 4:2 (2013)
ISSN 2037-4445 © http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

SCUOLA ESTIVA DI LOGICA

[Palazzo Feltrinelli – Gargnano sul Garda, 26-31 agosto 2013]

Matilde Aliffi

La Scuola Estiva di logica, organizzata dall'Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni (AILA) e dalla Società Italiana di Logica e Filosofia della Scienza (SILFS), ha avuto luogo dal 25 al 31 agosto a Gargnano sul Garda.

La Scuola, giunta alla quindicesima edizione, ha offerto due corsi istituzionali, il primo di carattere filosofico in Storia della Logica, tenuto dal Prof. Massimo Mugnai, docente di Storia della Logica alla Scuola Normale Superiore di Pisa, e il secondo in Logica Computazionale, tenuto dal Prof. Davide Sangiorgi, docente di Informatica dell'Università degli Studi di Bologna e membro dell'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique). Accanto ai corsi istituzionali si sono svolte due lezioni magistrali, tenute dalla Dott.ssa Sonia L'Innocente, ricercatrice all'Università di Camerino e dal Prof. Vincenzo Marra, ricercatore all'Università degli Studi di Milano.

L'obiettivo della Scuola è quello di permettere a studenti e dottorandi in Filosofia, Informatica, Matematica, Fisica e Ingegneria di ampliare e integrare le proprie conoscenze in logica, favorendo inoltre un incontro tra una diversità di approcci e uno scambio di idee tra i partecipanti. La possibilità di incontrarsi viene percepita dagli studenti come particolarmente preziosa, data la mancanza in Italia di un percorso di studi specificamente indirizzato allo studio della logica. Durante le edizioni passate della Scuola infatti da questa esigenza è nata l'idea di creare ulteriori occasioni di condivisione delle proprie ricerche, e dal 2007 è stato istituito il Seminario di Logica Permanente (SELP)[1], che ha avuto modo di presentare le sue iniziative anche in questa edizione. Il tempo libero tra le lezioni e la cornice paesaggistica suggestiva hanno contribuito a favorire relazioni tra le persone e lo scambio di contatti e idee per condividere e realizzare ulteriori progetti futuri.

In questo report si tratterà sinteticamente una parte dei contributi delle lezioni mattutine, esprimendo alcuni dei concetti più importanti che sono emersi durante la Scuola.

[1] http://selp.apnetwork.it/sito/.

AUTORE. Matilde Aliffi. matilde.aliffi@gmail.com.

Indice

1 *Lezioni in Storia della Logica* Prof. Massimo Mugnai

Mugnai ha dedicato le sue lezioni alla nozione di "seguire da", ad alcuni elementi di logica antica e medievale, al pensiero di Leibniz e al processo di matematizzazione della logica. Durante il corso è emerso come fare storia di una disciplina "scientifica" richieda scelte di metodo, che riguardano il modo in cui si comprende il rapporto tra presente e passato, la possibilità di sostenere l' unità della disciplina, e un impegno sulla natura della logica. Servendosi anche dell'aiuto dei testi originali, Mugnai ha preferito leggere il passato evitando il ricorso alla logica dei "precorrimenti", secondo cui ciò che si afferma più ampiamente diventa punto di riferimento per analizzare il passato, mentre le possibili soluzioni alternative vengono lette come "rami secchi", privi di un reale interesse storico. Per Mugnai invece gli antichi non sono semplicemente degli anticipatori di ciò che più tardi nella storia si affermerà, ma vanno letti in tutta la loro ricchezza, all'interno di una adeguata contestualizzazione; il riferimento a soluzioni cronologicamente successive è stato usato infatti più come un confronto utile per differenziare e chiarire i concetti che come chiave interpretativa.

Mugnai ha inoltre insistito sulla peculiarità della logica, come disciplina "corta", nella quale la distanza tra lo stato attuale del suo sviluppo e il momento in cui è nata risulta meno marcata di quella di altre discipline scientifiche. Anche se la differenza tra la logica aristotelica e la logica matematizzata è piuttosto marcata, è difficile rifiutare di riconoscere che antichi e contemporanei condividessero problemi e concetti riguardanti la stessa materia. Mugnai ha quindi privilegiato una concezione continuista, ritenendo che sarebbe fuorviante cercare di stabilire una cesura tra la logica "classica", prefregeana, e la logica matematizzata. All'interno di questa cornice Mugnai ha svolto le sue lezioni, interessanti non solo per lo studente di filosofia, ma anche per lo studioso di scienze dure che ha potuto così arricchire di profondità storica i propri concetti.

Per quanto riguarda la ricostruzione storica della nozione di "seguire da" ci si è soffermati su tre diverse concezioni, riconducibili a Filone di Megara e Crisippo di Soli, logici e filosofi della scuola megarico-stoica e ad Abelardo[2], logico e filosofo medievale. Filone di Megara sosteneva che il condizionale fosse vero quando non si dà il caso che cominci col vero e finisca col falso. Le condizioni di verità del condizionale filoniano, quindi, si possono rappresentare attraverso la tavola di verità nella tabella 1, nella quale 0=falso e 1=vero.

Secondo Filone, quindi, per determinare le condizioni di verità di un condizionale è sufficiente tener conto solamente dei valori di verità di antecedente e conseguente, evitando che l'antecedente sia vero senza che lo sia il conseguente. Non si richiede dunque alcun tipo di connessione tra antecedente e conseguente, infatti per Filone la conseguenza logica è valida anche per un enunciato del tipo «se la terra vola, la terra esiste» nel quale l'antecedente è

[2]Per una lettura approfondita leggere (Mugnai, 2013, cap. VI).

α	β	$\alpha \to \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabella 1: Tavola di verità del condizionale filoniano.

falso e il conseguente vero. Questa concezione tuttavia potrebbe lasciare perplessi, infatti per essa qualsiasi conseguenza logica con un antecedente falso risulta vera, così come qualsiasi conseguenza nella quale antecedente e conseguente sono veri, indipendentemente dalla connessione tra essi.

Crisippo di Soli invece non effettua una valutazione del condizionale semplicemente componendo i valori di verità dei due membri, ma richiede che l'opposto del conseguente sia incompatibile con l'antecedente per concludere la verità della connessione. La conseguenza «se è giorno, c'è luce» quindi per Crisippo è vera perché l'opposto del conseguente è incompatibile con l'antecedente, infatti «non c'è luce» è incompatibile con «è giorno», mentre l'asserzione «se è giorno, Dione passeggia», vera nell'interpretazione filoniana, per Crisippo è falsa, infatti l'opposto del conseguente non è incompatibile con l'antecedente, dal momento che «Dione non passeggia» non è incompatibile con «è giorno».

Abelardo tuttavia critica il condizionale crisippeo perché secondo esso si è costretti anche ad accettare come veri tutti i condizionali che si basano su un antecedente impossibile. Mentre secondo Crisippo la conseguenza «se Socrate è una pietra, Socrate è un asino» è sempre vera, dal momento che è impossibile che «Socrate è una pietra» sia vero e «Socrate è un asino» falso, Abelardo nega la verità di questo condizionale. Egli infatti richiede una inseparabilità concettuale, ossia che il senso del conseguente sia contenuto in quello dell'antecedente, una concezione che, letta con gli occhi del logico contemporaneo può definirsi quasi "rilevante". In questa prospettiva inoltre Abelardo fu il primo a distinguere l'argomento

(1) $\alpha \vdash \beta$

da

(2) $\alpha \to \beta$

Infatti per Abelardo, mentre l'argomento «se Socrate è un uomo allora Socrate non è una pietra» è corretto, non lo è necessariamente il condizionale corrispondente. Quindi «Socrate è un uomo *implica* Socrate è una pietra» è vero mentre «Socrate è un uomo, *dunque* Socrate è una pietra» è falso, poiché nel primo caso non è necessario il contenimento, mentre nel secondo sì.

Queste tre diverse concezioni del condizionale si ritrovano anche in autori contemporanei. Mentre Peirce ritiene che nell'ambito della logica formale il condizionale filoniano sia il più adatto, Hugh McColl nel 1880 presenta un calcolo logico su *Mind* analogo a quello di Crisippo (McColl, 1880). Lewis invece adotta una interpretazione analoga a quella di Abelardo, proponendo nel 1912 su *Mind* un calcolo logico basato sulla implicazione stretta, secondo cui il condizionale è vero quando è impossibile che l'antecedente sia vero ed il conseguente falso (Lewis, 1912).

Un altro problema trattato durante le lezioni è stato quello del rapporto tra la logica e la matematica. Esso è stato affrontato individuando in una prospettiva storica le origini del problema e le differenti soluzioni adottate, che hanno portato la logica alla sua matematizzazione. Anche se con il tramonto della Scolastica e l'affermarsi dell'Umanesimo si diffonde in Europa una generale diffidenza verso la logica, è dalla seconda metà del sedicesimo secolo che i rapporti tra logica e matematica iniziano ad essere discussi. Infatti nell'antichità logica e matematica venivano considerate due discipline distinte e nel medioevo furono in pochi ad occuparsi del problema dei rapporti tra le due discipline, nonostante la grande fioritura che ebbe lo studio della logica. Con la riscoperta dei testi di Euclide invece la matematica diventò esempio di rigore dimostrativo, e logica e geometria iniziarono ad avvicinarsi in un processo che vede un "movimento" della logica verso la matematica e un "movimento" della matematica verso la logica.

Il movimento della logica verso la matematica iniziò a realizzarsi nel sedicesimo secolo dalle idee di Conrad Dasypodius e Christian Herlinus. In quel periodo infatti ci si chiedeva se la logica tradizionale, di impianto aristotelico-scolastico, fosse adeguata a svolgere le dimostrazioni matematiche. Mentre secondo Alessandro Piccolomini la dimostrazione per eccellenza della tradizione aristotelica non poteva essere applicata alla matematica, per Dasypodius e Herlinus era possibile rendere esplicita la struttura logica di ciascuna dimostrazione degli *Elementi* di Euclide attraverso la logica aristotelica con la aggiunta di altre regole e principi della tradizione stoica, come il *modus ponens* e la *legge di contrapposizione*.

Il movimento della matematica verso la logica invece ha origine con Thomas Hobbes; secondo il filosofo inglese, infatti, ragionare significa addizionare e sottrarre. Verso la fine del sedicesimo secolo, con François Viète iniziò a svilupparsi l'idea che fosse possibile utilizzare lettere dell'alfabeto per eseguire calcoli, al fine di ottenere una elevata generalità. Leibniz, con la scoperta del calcolo infinitesimale aveva mostrato che i calcoli non usavano solo numeri, ma lettere, estendendo l'ambito del calcolabile a qualsiasi tipo di simboli. Questa scoperta tuttavia generò un'ampia disputa per stabilire chi tra Newton e Leibniz ne meritasse la priorità, anche se in realtà, come oggi si può affermare, la scoperta del calcolo infinitesimale fu effettuata indipendentemente da entrambi. A conseguenza della disputa l'approccio newtoniano, fondato su una concezione "geometrico-dinamica" delle grandezze si diffuse soprattutto tra i matematici del Regno Unito, mentre nel continente, e in particolare in Francia e Germania, si preferì la notazione leibniziana, più facile da usare e svincolata dall'interpretazione di tipo fisico-cinematico, propria dell'approccio di Newton. In seguito a questa disputa i matematici inglesi rimasero in una situazione di relativo isolamento, finché, verso la metà dell'Ottocento, Augustus De Morgan e William Rowan Hamilton non rinnovarono con i loro studi l'interesse per la logica in Gran Bretagna. I due logici si impegnarono in una controversia sulla "quantificazione del predicato", che riguardava chi per primo avesse sostenuto, contrariamente al parere di Aristotele, che negli enunciati categorici tradizionali era legittimo esprimere la quantità del predicato, oltre a quella del soggetto. In questo clima George Boole ricevette lo stimolo a occuparsi di logica. Egli in *The Mathematical Analysis of Logic* distinse l'interpretazione dei simboli utilizzati nel calcolo dalle leggi che regolano la combinazione degli stessi simboli, e affermò che l'interpretazione quantitativa di essi non era l'unica possibile. Per Boole infatti i simboli possono essere usati anche per designare operazioni logiche o concetti generali, per esempio classi di oggetti qualsiasi promuovendo una evoluzione della matematica da "scienza della quantità" a "scienza della qualità". La logica viene quindi ricondotta nell'ambito di una trattazione algebrica ed il calcolo logico diventa un particolare settore della matematica applicata.

Mentre Boole completa il processo di avvicinamento della logica verso la matematica, arrivando ad assorbirla *nella* matematica, dal momento che la logica viene considerata un ramo della matematica applicata, Frege portò a termine il movimento della matematica verso la logica, fino a sostenere una preminenza della logica rispetto alla matematica. Secondo il filosofo tedesco infatti la matematica era concepita come una struttura originata dallo sviluppo di nozioni e principi logici fondamentali, attraverso definizioni e teoremi. Nella misura in cui le cui parti superiori possono essere ricondotte al fondamento, una volta che esso sia risolubile in assiomi e definizioni logiche, secondo Frege si è mostrato che l'intera matematica, ad eccezione della geometria, non sia altro che logica applicata. Per realizzare questo progetto Frege costruì un linguaggio caratteristico artificiale, l'ideografia, funzionale al progetto di logicizzazione della matematica.

È interessante notare che i due progetti portati avanti da Boole e da Frege erano già presenti nel pensiero logico leibniziano. Leggendo i suoi scritti infatti ci si rende conto che Leibniz avesse già sognato di "matematizzare" la logica, e questo secondo due prospettive parallele. Da un lato quella di tipo combinatorio, simile al progetto realizzato successivamente da Boole, per cui, dato un insieme di simboli si procede a "manipolarli" attraverso operazioni, avendo di mira fondamentalmente il risultato finale. Dall'altro nei testi di Leibniz si legge continuamente che in una dimostrazione tutto deve essere specificato nei minimi dettagli in modo rigoroso, senza salti e senza affidarsi ad espressioni delle quali non si controlla il significato. Questa insistenza rivolta a trovare una dimostrazione rigorosa conferisce una preminenza alla logica rispetto alla matematica, aspetto che può essere accostato al progetto fregeano.

La prospettiva di Frege, tuttavia, ha introdotto una distanza tra la logica matematizzata e la logica tradizionale, ed ha aperto la strada ad un approccio quasi normativo della logica, che, sempre più distante dal modo di pensare umano, cerca essere canone di come *dobbiamo pensare*. Alcuni logici contemporanei tuttavia hanno proposto una reazione a questa prospettiva. Johan van Benthem, in particolare, ha cercato di avvicinare logica e pensiero, lavorando all'interno di un programma di ricerca volto ad affermare l'esistenza di una logica "naturale" sottostante al linguaggio comune, che stia alla base della capacità umana di inferire e di pensare. Per realizzare questo progetto egli ha analizzato la logica sillogistica, individuando un legame tra il principio di monotonicità e la teoria della distribuzione della Scolastica medievale, riuscendo così a motivare perché le inferenze che venivano svolte nell'ambito della logica tradizionale fossero corrette. Secondo Van Benthem, infatti, il principio di monotonicità dovrebbe spiegare perché la sillogistica autorizzasse una sostituzione di predicati con predicati con una estensione più grande o più piccola. L'esempio presente in letteratura che mostra l'inadeguatezza della sillogistica medievale e la sua inferiorità nei confronti della logica moderna di Boole e Frege risale a De Morgan ed è il seguente:

(3) Ogni cavallo è un animale. Dunque ogni coda di cavallo è la coda di un animale

De Morgan aveva osservato che la logica sillogistica non riesce a rendere conto di inferenze come (3) poiché per capirne la validità bisognerebbe ricorrere a relazioni binarie, mentre la logica tradizionale era basata su predicati monadici. Invece, attraverso il linguaggio logico del primo ordine, è possibile mostrare la validità dell'argomento nel seguente modo, dove H=cavallo, A=animale e T=coda:

$$\frac{\forall x(Hx \rightarrow Ax)}{\forall x((Tx \wedge \exists y(Hy \wedge Rxy)) \rightarrow (Tx \wedge \exists y(Ay \wedge Rxy)))}$$

Gli antichi tuttavia effettuavano inferenze analoghe a (3) come la seguente:

$$\frac{\text{La grammatica è un'arte}}{\text{Colui che impara la grammatica impara un'arte}}$$

Come già Sanchez Valencia aveva affermato, queste inferenze nella logica tradizionale erano valide poiché il sillogismo veniva applicato in un senso *ampio*, per il quale valgono alcune leggi sillogistiche aggiuntive, ossia che la specie (il termine più piccolo) può prendere il posto del genere (il termine più ampio) quando si parla di tutto il genere oppure che il genere (il termine più ampio) può prendere il posto della specie (termine più piccolo) quando qualcuna delle specie è menzionata. Anche se non si dovesse condividere con van Benthem l'esistenza di una logica "naturale" sottostante al linguaggio comune, secondo Mugnai, questo approccio ha comunque il merito importante di rivalutare alcuni aspetti della logica tradizionale, poiché talvolta la concezione moderna, basata sulla nozione di sistema formale, non rende giustizia di come la sillogistica funzionava realmente.

Riferimenti bibliografici

- George Boole (1847). *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning*. Macmillan, Barclay, & Macmillan. URL: http://www.gutenberg.org/ebooks/36884. Reprinted in Oxford by Basil Blackwell, 1951
- Clarence Irving Lewis (1912). "Implication and the Algebra of Logic". In: *Mind* 21, pp. 522–531
- Hugh McColl (1880). "Symbolical reasoning". In: *Mind* 5.17, pp. 45–60
- Massimo Mugnai (2013). *Possibile necessario*. Bologna: Il Mulino
- Victor Sànchez Valencia (1997). "Head or Tail? De Morgan on the bounds of traditional logic". In: *History and Philosophy of Logic* 18, pp. 123–138
- Johan van Benthem (2008). "A Brief History of Natural Logic". In: *Technical Report PP-2008-05*, pp. 123–138

2 *Bisimulazione e coinduzione* Prof. Davide Sangiorgi

Davide Sangiorgi nel suo corso ha presentato una introduzione ai concetti di bisimulazione e coinduzione[3], privilegiando il loro utilizzo come tecniche di prova per stabilire una uguaglianza tra processi. In questo report saranno presentate le nozioni di base del concetto di bisimulazione, sintetizzando il contenuto delle prime lezioni del prof. Davide Sangiorgi.

Per avere una idea intuitiva dell'esigenza di introdurre la tecnica di bisimulazione, si immagini di avere una macchina per il caffè, molto semplice, con una apertura dove mettere i soldi e due tasti, che permettono di scegliere rispettivamente tè o caffè. Dopo aver inserito la moneta si può richiedere la bevanda premendo, a seconda della propria scelta, il tasto del tè o il tasto del caffè. Immaginiamo quindi che sulla macchina sia presente una etichetta che spiega il comportamento della macchina nel modo seguente:

- Inserisci la moneta.
- Dopo avere inserito la moneta puoi premere il tasto del tè oppure il tasto del caffè.

[3]Per una esposizione precisa e completa leggere (Sangiorgi, 2012).

- Dopo che hai premuto il tasto del caffè ottieni il caffè.
- Dopo che hai premuto il tasto del tè ottieni il tè.
- Dopo che la bevanda è stata erogata, la macchina è pronta per un nuovo servizio.

Immaginiamo che ad un certo punto la macchina si rompa e che la ditta che aveva prodotto la macchina guasta sia fallita. A questo punto ci si rivolgerà ad una nuova ditta per ordinare una macchina nuova capace di erogare tè o caffè. La ditta designata allora fornisce una nuova macchina, che tuttavia funziona diversamente dalla precedente. Infatti, dopo aver inserito la moneta essa eroga non deterministicamente tè o caffè, quando il tasto raffigurante il tè o il caffè viene premuto. Essa può quindi erogare correttamente la bevanda selezionata, ma anche servire tè quando si è premuto il tasto del caffè o il caffè quando si è premuto il tasto del tè.

A questo punto immaginiamo di chiamare la ditta che ha fornito la macchina, chiedendo di volerne un altra perché questa non si comporta come la precedente che avevamo richiesto. La ditta tuttavia non accetta di sostituirla, perché a suo avviso sostiene di avere fornito una macchina che soddisfaceva le precedenti richieste, infatti la possibilità di premere un tasto del caffè e uno del tè e di bere la bevanda erogata viene da essa garantita.

Grazie a questo esempio ci si rende conto della esigenza di poter esprimere quando due processi hanno un comportamento equivalente. È bene ricordare che nel cercare questa relazione non si è interessati a dettagli riguardanti forma o colore della macchine, bensì al loro comportamento. Una descrizione del comportamento di una macchina di questo tipo si può rendere con i Labelled Transition System (LTS).

Un Labelled Transition System è una tripla $\langle P, Act, T\rangle$ dove:

- P è l'insieme (non vuoto) di stati o di processi;
- Act è l'insieme delle azioni (eventualmente infinito);
- $T \subseteq \langle P, Act, P\rangle$ è la relazione di transizione.

Si scrive quindi $P \xrightarrow{\mu} P'$ se $(P, \mu, P') \in T$ quando il processo P accetta una interazione con l'ambiente e effettua l'azione μ per diventare il processo P'. P' è un derivato di P se ci sono $P_1, \ldots, P_n$, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ tale che $P \xrightarrow{\mu_1} P_1 \ldots \xrightarrow{\mu_n} P_n$ e $P_n = P'$.

Un LTS dice quindi quali sono gli stati o i processi in cui un sistema può essere e, per ogni stato, le interazioni possibili. Il comportamento della prima macchina caffè quindi può essere rappresentato come LTS nel modo seguente:

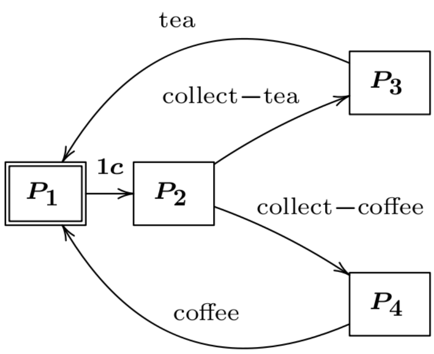

Figura 1: LTS (1).

In questo esempio quindi si ha un insieme di processi non vuoto, ossia $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, delle azioni, che in questo caso sono:

$$\{1c, collect - tea, collect - coffee, tea, coffee\}$$

e relazioni di transizione, ossia:

$$\{(P_1, 1c, P_2), (P2, collect - tea, P_3), (P_2, collect - coffee, P_4), (P_4, coffee, P_1), (Q_3, tea, P_1)\}$$

Il comportamento della seconda macchina è invece rappresentato dal seguente LTS:

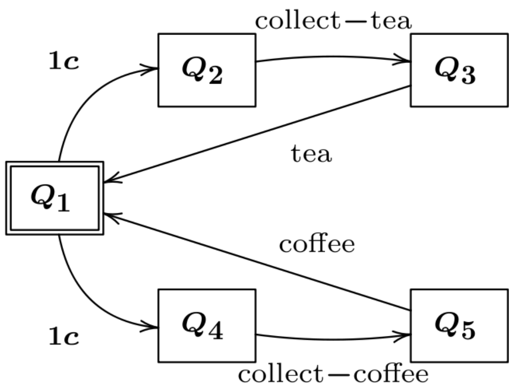

Figura 2: LTS (2).

Intuitivamente (1) e (2) sono macchine che esprimono un comportamento diverso, poiché quello che intendiamo per uguaglianza tra due macchine è la possibilità di eseguire la stessa operazione con la prima e la seconda macchina, e lo stesso anche per i due stati in cui le macchine evolvono. Si può formalizzare quindi il concetto di bisimulazione e di bisimilarità nel seguente modo:

> Si definisce una bisimulazione, in un singolo LTS, come la relazione $\mathcal{R}$ su processi se ogniqualvolta $P\mathcal{R}Q$:
>
> 1. $\forall \mu, P'$ tale che $P \xrightarrow{\mu} P'$, allora $\exists Q'$ tale che $Q \xrightarrow{\mu} Q'$ e $P'\mathcal{R}Q'$;
> 2. $\forall \mu, Q'$ tale che $Q \xrightarrow{\mu} Q'$, allora $\exists P'$ tale che $P \xrightarrow{\mu} P'$ e $P'\mathcal{R}Q'$.
>
> P e Q sono bisimili, scritto $P \sim Q$ se $P\mathcal{R}Q$ per qualche bisimulazione $\mathcal{R}$.

La definizione data sopra dà origine ad una tecnica di prova per verificare che due processi sono bisimili. Siano date le seguenti figure:

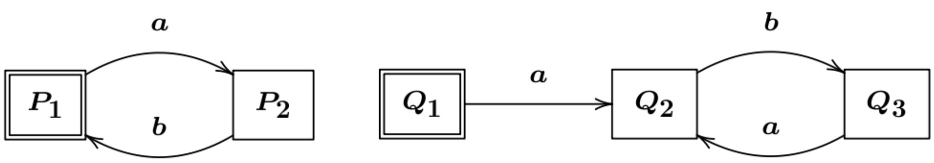

Figura 3: LTS (3), a sinistra, e LTS (4), a destra.

Per provare che sia $P_1 \sim Q_1$ bisogna trovare una relazione $\mathcal{R}$ di bisimulazione che contenga la coppia (P_1, Q_1). Affinché una relazione $\mathcal{R}$ sia una bisimulazione, tutti i derivati di P_1 e Q_1 devono apparire in $\mathcal{R}$, come da definizione. Si supponga di voler definire $\mathcal{R} = \{(P_1, Q_1), (P_2, Q_2)\}$. Si avrà quindi il seguente diagramma di bisimulazione per (P_1, Q_1):

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \mathcal{R} & Q_1 \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle a}\downarrow \\ P_2 & \mathcal{R} & Q_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} P_1 & \mathcal{R} & Q_1 \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle a}\downarrow \\ P_2 & \mathcal{R} & Q_2 \end{array}$$

Per la coppia (P_2, Q_2) tuttavia non è possibile trovare una relazione di bisimulazione, dal momento che un derivato di Q_2, in questo caso Q_3, rimane scoperto. Mentre effettuando una transizione da P_2 si ottiene P_1, l'unica transizione possibile da Q_2 è $Q_2 \xrightarrow{b} Q_3$, e la coppia (P_1, Q_3) non appartiene a $\mathcal{R}$.

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \mathcal{R} & Q_2 \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow \\ P_1 & \not\mathcal{R} & Q_3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} P_2 & \mathcal{R} & Q_2 \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow \\ P_1 & \not\mathcal{R} & Q_3 \end{array}$$

Aggiungendo la coppia (P_1, Q_3) si ottiene invece una bisimulazione. Infatti se:

$$\mathcal{R} = \{(P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_1, Q_3)\}$$

la relazione $\mathcal{R}$ nel diagramma precedente è verificata, e per la coppia (P_1, Q_3) si avrà che:

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \mathcal{R} & Q_3 \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle a}\downarrow \\ P_2 & \mathcal{R} & Q_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} P_1 & \mathcal{R} & Q_3 \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle a}\downarrow \\ P_2 & \mathcal{R} & Q_2 \end{array}$$

Dato che (P_2, Q_2) appartiene a $\mathcal{R}$, per definizione segue che $P_1 \sim Q_1$.

Durante il corso questi concetti sono stati sviluppati ulteriormente e si è insistito sull'utilità di queste tecniche, utilizzate non solo in informatica, ma anche in intelligenza artificiale, scienze cognitive, matematica, filosofia e fisica, prevalentemente per spiegare fenomeni che coinvolgono un certo tipo di circolarità. In informatica per esempio la bisimulazione è prevalentemente utilizzata in teoria della concorrenza e nel *model checking*, in filosofia negli ambiti di ricerca che fanno uso della logica modale, in matematica, per esempio, nello studio di insiemi che non soddisfano l'assioma di regolarità, in fisica nello studio di modelli di sistemi quantistici.

La bisimulazione[4] è un ambito di ricerca particolarmente recente, e questo è dovuto in parte al fatto che, benché quando la teoria degli insiemi venne assiomatizzata da Zermelo rimanesse ancora aperta la possibilità di definizioni che coinvolgessero una certa forma di circolarità, dopo la scoperta dell'insorgere di paradossi come quello di Russell o di Burali-Forti si cercò di rigettare qualsiasi forma di circolarità. Si affermò quindi la teoria dei tipi proposta da Russell che permette di costruire solamente costruzioni stratificate, eliminando qualsiasi circolarità. La forte influenza di questo approccio stratificato ha contribuito a ritardare la scoperta della bisimulazione, che avvenne solamente negli anni '70 indipendentemente in informatica, matematica e logica modale. Fu scoperta in informatica in seguito ai lavori di Hennessy e Milner nello studio di processi in teoria della concorrenza, in teoria degli insiemi in alcuni studi intrapresi per formalizzare una nuova fondazione per la matematica che ammettesse l'esistenza di insiemi non ben fondati, e in logica modale per studiarne l'espressività.

[4]Per approfondire, si veda (Sangiorgi, 2009).

Questo ambito di ricerca inoltre è ancora molto fertile, alcuni problemi, per esempio, riguardano la bisimulazione di linguaggi di ordine superiore, il suo sviluppo come metodo di prova, linguaggi con costrutti probabilistici o nozioni unificanti. Bisimulazione e coinduzione inoltre sono concetti con una forte natura interdisciplinare, che possono essere applicati in ambiti diversi e che quindi possono anche permettere di comprendere alcune analogie e similitudini tra fenomeni che a prima vista possono sembrare molto diversi tra di loro.

Riferimenti bibliografici

- Davide Sangiorgi (2009). "On the origins of bisimulation and coinduction". In: *ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS)* 31.4, pp. 1–41
- Davide Sangiorgi (2012). *Introduction to bisimulation and coinduction*. Cambridge: Cambridge University Press