Ufficialmente patrocinata
per l'anno 2011 dalla
Società Italiana di Filosofia Analitica

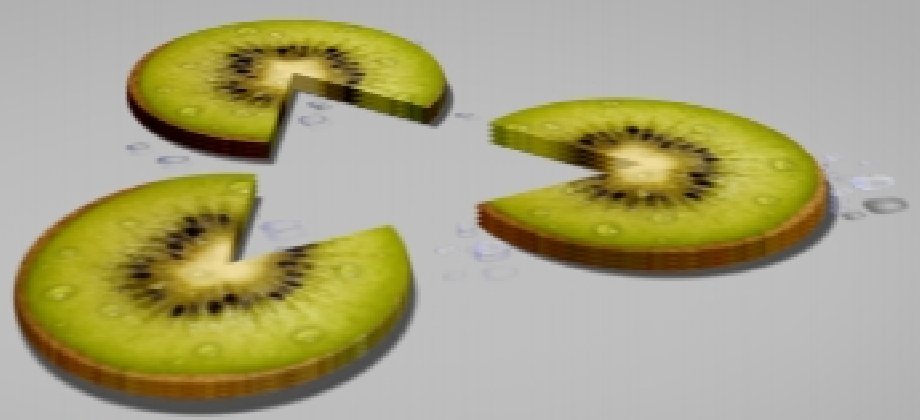
Peer Review Journal

Rivista Italiana di Filosofia Analitica *junior*

A cura di / Edited by:

Giorgio Sbardolini - Giorgio Venturi (SELP)

Ettore Brocca
Gianmarco Brunialti Masera
Pietro Casati
Bianca Cepollaro
Mattia Cozzi
Michele Herbstritt
Giacomo Lini
Carlo Monti
Mattia Sorgon



Numero II Volume II 2011

Number II Volume II 2011

Rivista Italiana di Filosofia Analitica *Junior*
http://www.rifanalitica.it
ISSN: 2037-4445

"Special issue

Filosofia della Matematica

[in collaborazione con
SELP *Seminario di Logica Permanente*]"

Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 © http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

FILOSOFIA DELLA MATEMATICA

Giorgio Sbardolini, Giorgio Venturi

Il numero che state per leggere è nato dalla collaborazione di RIFAJ con il SELP (SEminario di Logica Permanente). La Rivista e il Seminario sono giovani, non solo per quanto riguarda la loro storia, che per entrambi è inferiore ai tre anni, ma anche per le persone che le animano.

Questo numero è dedicato alla Filosofia della Matematica e riunisce gli sforzi congiunti di RIFAJ e del SELP. Una parte consistente degli articoli presentati ha origine dalle relazioni tenute alle "Due giornate di studio sulla filosofia della matematica", organizzate dal SELP presso l'Università degli Studi di Milano il 22 e 23 giugno scorso. Questi contributi, che presentiamo in una sezione speciale, sono una versione ampliata ed approfondita degli interventi presentati alle "Due giornate": M. Ginammi, *The Unreasonable Effectiveness*, L. Malatesta, *Some proposals for the set theoretic foundations of category theory*, L. Turri, *History and becoming of Science in Jean Cavaillès*, e G. Venturi, *Hilbert, completeness and geometry*.

RIFAJ si è incaricata di valutare la validità dei lavori proposti dai relatori del SELP attraverso il suo comitato scientifico, in linea con lo spirito che ha fatto nascere questa rivista: essere un giornale aperto a studenti e dottorandi desiderosi di mettersi alla prova col mondo della ricerca.

Il SEminario di Logica Permanente è un'associazione di giovani studenti e studiosi, accomunati dall'idea che l'aspetto più interessante e caratteristico della logica sia il suo carattere interdisciplinare. Il suo scopo è promuovere lo studio della logica da un punto di vista filosofico, matematico ed informatico, nella convinzione che nell'interazione di queste discipline si trovi il suo punto di forza e l'aspetto di maggiore bellezza. Il SELP ha scelto di organizzare le "Due giornate" in Italia, in italiano e con relatori italiani, anche se molti di loro afferiscono a dipartimenti stranieri, con lo scopo di dare una panoramica, per quanto parziale, dei temi e dei giovani studiosi italiani che ora si occupano di filosofia della matematica.

Ma perché la filosofia della matematica? La scelta della filosofia della matematica, per noi, è stata una scelta di confronto quasi naturale e quasi doverosa.

È un dato storico che la matematica moderna e la filosofia analitica siano nate nello stesso giro d'anni, pungolate dalle stesse esigenze, in alcuni casi persino ad opera delle stesse persone, impegnate a perseguire la perfezione nelle dimostrazioni, la lucidità nelle conclusioni e la chiarezza nelle proprie ipotesi. La filosofia analitica della matematica, come nota Gabriele Lolli nell'intervista che Carlo Monti ha preparato per lui su questo numero, non ha forse una definizione netta e riassumibile in poche parole: ma se c'è un pensiero filosofico consapevole della logica, problematico, tutt'altro che rassicurante, attento nel sollevare problemi e paradossi di cui la matematica s'è nutrita per un secolo, questo è il pensiero analitico: pulito

AUTORI. Giorgio Sbardolini. giorgio.sbardolini@gmail.com. Giorgio Venturi. gio.venturi@gmail.com

dalle ridondanze e dalla piattezza di uno sterile storicismo – per cogliere uno spunto dall'altra intervista che pubblichiamo, a Ermanno Bencivenga, curata da Mattia Sorgon.

Ecco quindi le ragioni della filosofia della matematica. Essa ha questa dote storica che le è caratteristica: è all'intersezione di tante diverse ricerche, ed inoltre è a monte (e a valle) di tutte. Vi sono infatti diverse anime che si trovano ad interagire nel contesto della filosofia della matematica: logica, informatica, ontologia, storia, pratica matematica e linguistica, pensiero scientifico. Qui dunque è possibile un confronto ed uno scambio tra opinioni diverse, che possono così progredire verso un punto di vista più generale, capace di interpretare il divenire della matematica.

Gli articoli che propongono i membri SELP possono essere tutti accomunati da intenti condivisi: partono da problematiche storiche, ma le utilizzano come pretesto per portare avanti un'analisi filosofica di concetti matematici. Si tratta di un'indagine relativa alle idee che stanno alla base dei problemi che hanno interessato i matematici e i filosofi della matematica a partire dalla crisi dei fondamenti di inizio novecento, fino alle proposte contemporanee. Uno degli obiettivi è stato quello di voler mostrare come alla base dello sviluppo della matematica ci siano anche scelte filosofiche. Esse vengono quindi analizzate, insieme alle loro conseguenze, nel contesto di un rapporto dialettico tra queste discipline. Più in generale, è convinzione di chi scrive che vi sia ormai una distanza storica tale da rendere possibile uno studio critico dei principali concetti e correnti della filosofia della matematica del novecento, in grado di proporre idee e punti di vista innovativi anche su temi ormai ritenuti classici. L'auspicio è quindi che questa collaborazione segni un punto di partenza per uno studio più maturo della filosofia della matematica in Italia, da parte delle nuove generazioni che si affacciano ora al mondo della ricerca.

Con questo spirito la redazione di RIFAJ ha lavorato per un numero monografico sulla filosofia della matematica, che ora presentiamo.

Abbiamo già citato le belle interviste rilasciate dal professor Bencivenga, e dal professor Lolli, rispettivamente della University of California, Irvine, e della Scuola Normale Superiore di Pisa, un filosofo e un matematico che sono figure centrali del pensiero filosofico e matematico italiano.

Usualmente, le interviste seguono subito l'editoriale, nell'indice del numero. Ma questa volta posticiperemo le interviste, e lasceremo che sia la splendida, inedita copertina del professor Michele Emmer (Università di Roma, La Sapienza) a introdurre un numero monografico, prendendo il via dal concetto più centrale, ovvio e chiaro, eppure sfuggente, dell'intera matematica: il numero. Nella storia, nell'arte, da Hilbert a Galileo.

Il contenuto speciale del numero contiene i lavori già ricordati dei membri del SELP. Le recensioni, ad opera della redazione, riguardano opere recenti del panorama italiano in filosofia della matematica. Si va da M. Panza, A. Sereni, *Il problema di Platone. Un'introduzione storica alla filosofia della matematica*, (2010), Carocci, recensito da Pietro Casati, a G. Lolli, *Discorso sulla matematica*, (2011), Bollati Boringhieri, a cura di Bianca Cepollaro; dalla recensione di Michele Herbstritt, di M. Frixione, D. Palladino, *La computabilità: algoritmi, logica, calcolatori*, (2011), Carocci, a quella di Giacomo Lini, di G. Ragunì, *I confini logici della matematica*, (2010), Aracne.

Vorremmo inoltre congratularci con gli autori delle due ulteriori proposte, per cui ringraziamo: G. Feis, *Meeting Dan Sperber's challenge to Searlean social ontology*, e M. Pascucci, *Verità e giustificazione degli asserti temporali*.

Pubblichiamo inoltre la recensione di E. Sanfilippo del libro curato da K. Munn e B. Smith, *Applied Ontology. An Introduction*.

Vi proponiamo i reportages di due conferenze a cui abbiamo presenziato, e di cui riproponiamo i contenuti con uno sguardo critico. Mattia Cozzi, Michele Herbstritt e Giacomo Lini hanno partecipato al Settimo Congresso Europeo di Filosofia Analitica, tenutosi a Milano dall'1 al 6 settembre, e di cui vorremmo ringraziare gli organizzatori. La nostra rivista, per quest'anno patrocinata dalla Società Italiana di Filosofia Analitica come rivista giovanile, ha seguito con attenzione e partecipazione i lavori di questo convegno. Mattia Cozzi e Mattia Sorgon hanno assistito ad "Another World is Possible", il convegno tenutosi all'Università "Carlo Bo" di Urbino il 16, 17 e 18 giugno, ed organizzato dal comitato editoriale di Aphex. A loro va un cordiale ringraziamento.

Pubblichiamo inoltre la risposta al gioco che Leonardo Caffo aveva proposto sul numero precedente, scelta dall'autore come la migliore tra quelle pervenutegli, ad opera di M. Grasso, e un invito, da parte di Giorgio Sbardolini, a giocare di nuovo.

Infine, la rivista si conclude con l'ExCathedra di A. Raveggi, *Offerta dell'ultimo minuto*, che ringraziamo sentitamente per questo lavoro, scritto apposta per RIFAJ.

Questo numero è davvero un numero molto ricco, e vorremmo rivolgere un ringraziamento particolare a tutti coloro che hanno partecipato alla sua redazione: i membri del comitato scientifico, il SELP, e la redazione di RIFAJ. Speriamo che la sua buona riuscita possa essere, per le giovani iniziative del SELP e di RIFAJ, un augurio per continuare con questa ricchezza durante tutta una lunga giovinezza.

Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

IL MISTERO DEI NUMERI

Michele Emmer

I choose numbers because they are so constant, confined, and artistic. Numbers are probably the only real discovery of mankind. A number of something is something else. It's not pure number and has other meanings.

Hanne Darboven, artista[1]

Dio ha creato gli interi; tutto il resto è opera dell'uomo.

Leopold Kronecker, matematico

[1](Lipard and Darboven, 1973, pp.35-36).

AUTORE. Michele Emmer. emmer@mat.uniroma1.it

1 Il mistero dei numeri

Nella notte dei tempi donne ed uomini impararono faticosamente a dominare il tempo e lo spazio, accorgendosi che molti fenomeni della natura si ripetevano in intervalli di tempo più o meno regolari. Se dei cacciatori incontravano dei predatori, lupi, leoni, orsi, avevano il problema di comunicare ai propri simili se quegli animali pericolosi erano pochi o molti. Avevano il problema di contare, anche per affermare la proprietà su animali domestici e territori. Avevano bisogno di contare e misurare. Cominceranno ad intaccare con segni le ossa di animali, un nemico una tacca. Il contare è una abilità molto precedente alla scrittura. Poi il grande salto. Il contare prescinde da che cosa si conta, è una operazione astratta. Lo stesso conteggio si applica a cose diversissime, dalle stelle alle pecore. Un salto incredibile per l'umanità. I segni rappresentavano oggetti, quei segni potevano essere ripetuti, comunicati, insomma il contare diventa una delle caratteristiche dell'umanità. Contare, i segni, astrazione: i numeri. Cominciando naturalmente da 1, il numero uno, il primo numero, il primo numero naturale. L'invenzione (ovvero la scoperta) dei numeri (non credo che i numeri fossero *qui* prima di noi) è stata una delle grandi scoperte (o invenzioni) dell'umanità. E ancora più importante del numero la capacità di contare. A quando si può far risalire la capacità di contare, e cosa vuol dire contare? Si deve operare ciò che in matematica si chiama *mapping* o applicazione o funzione; a ogni oggetto, prescindendo del tutto dalla natura dell'oggetto, si applica un numero, si assegna cioè un numero agli oggetti: li si numera; li si conta, appunto.

Naturalmente nessuno sa quando e dove gli esseri umani hanno maturato questa capacità per noi così ovvia. La più diretta conferma di questa capacità, come racconta George Ifrah ne *La storia universale dei numeri*[2], è stata trovata su una tibia di giovane lupo, trovato in quella che era la Cecoslovacchia, ha 55 tacche e 20000-30000 anni. Su un osso di babbuino nelle montagne Lelembo, nello Swaziland (Africa meridionale), compaiono 29 tacche, per contare chissà cosa; l'osso ha 35000 anni. Tutti prodotti dell'*Homo sapiens sapiens* ben anteriori all'agricoltura, alla terracotta. Probabilmente la prima traccia di una capacità di manipolare numeri si ha nell'impugnatura di un attrezzo in osso trovato tra le alture montuose dell'Africa equatoriale, ai confini tra l'Uganda e il Congo, dove si trova il lago Edoardo, una delle sorgenti più lontane del Nilo. L'osso, chiamato *Ishango*, si trova al museo di storia naturale di Bruxelles e contiene una serie di incisioni disposte su tre colonne distinte. Segni che rappresentano forse un primo passo verso la costruzione di un sistema di numerazione. Risale a circa 18.000 anni a. C.

Figura 1: [*Ishango*] da G. Ifrah, indicare la fonte.

Se è probabile che il contare sia nato come una necessità, come contare la selvaggina, come dividersi le prede, come contare i giorni, è probabile che il primo sviluppo delle operazioni con i numeri, dalle addizioni alle sottrazioni alle più complesse moltiplicazioni e divisioni, sia avvenuto per suddividere terreni ereditati, per calcolare aree.

Le prime fattorie nascono intorno al 10000 a.C. nel Medio Oriente. Il che poneva nuovi problemi: contare e misurare i prodotti della terra, dividere coloro che lavoravano, contare gli

[2](Ifrah, 1983).

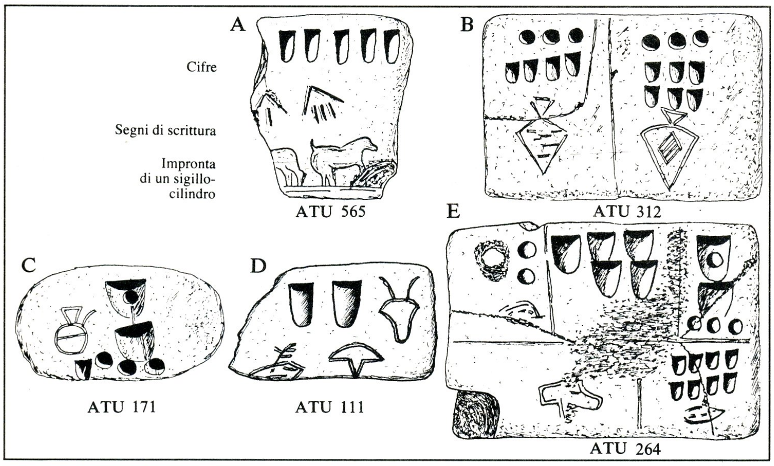


Figura 2: Tavolette sumeriche da Uruk, 3200 a.C., da G. Ifrah, indicare la fonte.

animali. Si iniziano ad utilizzare piccoli oggetti per contare: tanti oggetti, tanti animali. Verso il 3100 a.C. tra i Sumeri si sviluppa un sistema che viene scritto; non più piccoli oggetti, il calcolo inizia a essere simbolico. Simboli rappresentano le quantità, basta guardare i simboli e si conosce quali siano le quantità degli oggetti. Una grande operazione di astrazione. E si comincia a contare con quelli che noi chiamiamo i numeri interi positivi ovvero i numeri detti naturali, proprio per sottolineare la loro semplicità, anche se ci sono voluti migliaia di anni per sviluppare un sistema numerico. Ad un certo punto i numeri interi non bastano più.

Per suddividere una eredità, un terreno come ci è stato detto a scuola, una torta, servono altri tipi di numeri.

I babilonesi e poi gli egiziani inventeranno le frazioni, proprio per risolvere questi problemi. Ai numeri interi positivi si aggiungono le frazioni. E servivano sempre più simboli per rappresentare tutti questi numeri. Ispirati alla divinità, come le parti in cui viene suddiviso l'occhio di Horus, e ognuna delle parti rappresenta una frazione dell'unità.

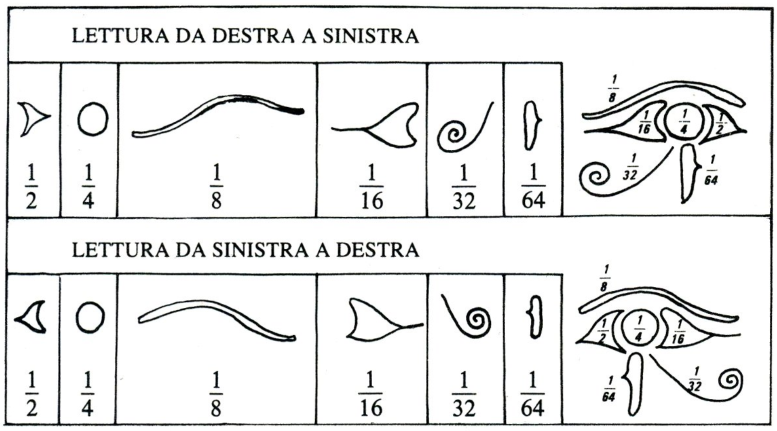


Figura 3: Frazioni dell'*heqat* (unità) rappresentate dalle parti del *udjat*, occhio del dio-falco Horus, da G. Ifrah, indicare la fonte.

Moltissime civiltà in epoche diverse ed in luoghi diversi hanno sviluppato un loro sistema numerico, sistemi più complessi ed efficaci, sistemi più semplici ed elementari.

Era abbastanza evidente che, data la grande importanza che i numeri venivano acquistando nella spiegazione e nella previsione dei fenomeni naturali, gli stessi matematici antichi cominciassero a chiamare i numeri *perfetti*, *amici*, attribuendo loro caratteri *umani*. Attribuendo ai numeri poteri di fortuna, di sfortuna. Ed ancora adesso i numeri sono legati alla fortuna, i numeri ci dovrebbero aiutare a prevedere il futuro. E i numeri diventarono *divini*. Il numero 1, il numero 3, il numero 7. Anche recentissimamente avvenimenti tragici ed orrendi nel mondo sono effettuati in determinate date per legarli meglio all'immaginario dei numeri. Chi scorderà mai l'11/9 o secondo l'uso inglese il 9/11?

Passano i millenni e i numeri diventano sempre più essenziali per la sopravvivenza dell'umanità. Il che significa che i numeri, anche quelli più semplici, i numeri interi positivi, non hanno più misteri per noi?

In realtà i numeri, anche quelli più semplici, sono un grande mistero, anche per i matematici, o almeno per quelli che lavorano nel settore chiamato la *Teoria dei Numeri*, uno dei settori più importanti della matematica contemporanea. Tanto misteriosa la natura del numero che un famoso matematico italiano, Giuseppe Peano, dovendo scrivere un insieme di assiomi per definire i numeri, affermava che «Il numero non si può definire poiché è evidente che comunque si combinino tra loro alcune parole (simboli) non si potrà mai avere un'espressione equivalente ad un numero»[3].

E Peano stava parlando dei numeri che tutti imparano a conoscere da bambini, 1,2,3,4,... I numeri naturali, nome quanto mai appropriato, a parte il mistero di quei puntini. I matematici hanno scoperto o inventato tanti numeri, i razionali, i complessi, gli irrazionali, i transfiniti, e tanti altri ancora, all'infinito. Ma già i semplici interi sono un mistero. Non sappiamo come definirli. Anche se tutti li usano senza problemi.

Se Peano alla fine del secolo scorso aveva dettato gli assiomi per i numeri naturali, nel 1900, al congresso mondiale di matematica a Parigi, David Hilbert, famoso matematico tedesco, compilò una lista di problemi che dovevano essere affrontati nel secolo successivo. Tra questi, il secondo suonava più o meno così: «La coerenza dell'aritmetica. Dimostrare cioè la compatibilità tra loro degli assiomi alla base dell'aritmetica»[4]. Sembrava una questione quasi ovvia nella sua formulazione. La risposta al problema, data da Kurt Gödel, è che no, non è possibile: in un sistema che formalizza l'aritmetica esistono sicuramente proposizioni vere ma non dimostrabili, e quindi la verità non corrisponde alla dimostrabilità. Esistono proposizioni di cui non si può stabilire se siano vere o false. Cosa che peraltro non preoccupa molto i matematici che utilizzano tranquillamente i diversi sistemi numerici.

Già Euclide ne *Gli Elementi* (IV-III a.C.) parla dei numeri ma non li definisce, non definisce le grandezze ma solo i rapporti tra di loro. In tre libri parla delle proprietà dei numeri, distinti quindi dalle grandezze. Si parla dei numeri interi positivi. E non li si definisce.

Tuttavia, l'opinione dei matematici è espressa molto chiaramente da Richard Courant e Herbert Robbins in *Che cosa è la matematica* del 1941[5]:

> Fortunatamente il matematico, come tale, non ha bisogno di interessarsi della natura filosofica del passaggio da insiemi di oggetti al concetto astratto di numero. Accetteremo perciò i numeri naturali come dati, assieme alle due operazioni fondamentali, addizione e moltiplicazione, con cui essi possono essere combinati.

Ma allora che cosa è un numero? Non si possono definire ma descrivere certo! Una bella descrizione dei sistemi numerici si trova in un romanzo di qualche anno fa:

[3](Peano, 1981).
[4](Hilbert, 1901).
[5](Courant and Robbins, 1941).

> Sai che cosa c'è alla base della matematica? Alla base della matematica ci sono i numeri. Se qualcuno mi chiedesse che cosa mi rende davvero felice, io risponderei: i numeri. La neve, il ghiaccio e i numeri. E sai perché?... Perché il sistema numerico è come la vita umana.
>
> Per cominciare, ci sono i numeri naturali. Sono quelli interi e positivi. I numeri del bambino. Ma la coscienza umana si espande. Il bambino scopre il desiderio, e sai qual è l'espressione matematica del desiderio?... Sono i numeri negativi. Quelli con cui si dà forma all'impressione che manchi qualcosa. Ma la coscienza si espande ancora, e cresce, e il bambino scopre gli spazi intermedi. Fra le pietre, fra le parti del muschio sulle pietre, fra le persone. E fra i numeri. Sai questo a cosa porta?
>
> Alle frazioni. I numeri interi più le frazioni danno i numeri razionali. Ma la coscienza non si ferma lì. Vuole superare la ragione. Aggiunge una operazione assurda come la radice quadrata. E ottiene i numeri irrazionali... È una sorta di follia. Perché i numeri irrazionali sono infiniti. Non possono essere scritti. Spingono la coscienza nell'infinito. E addizionando i numeri irrazionali ai numeri razionali si ottengono i numeri reali...
>
> Non finisce. Non finisce mai. Perché ora, su due piedi, espandiamo i numeri reali a quelli immaginari, radici quadrate di numeri negativi. Sono numeri che non possiamo figurarci, numeri che la coscienza normale non può comprendere. E quando aggiungiamo i numeri immaginari ai numeri reali abbiamo i sistemi numerici complessi. Il primo sistema numerico all'interno del quale è possibile dare una spiegazione soddisfacente della formazione dei cristalli di ghiaccio.

Chi parla è Smilla, la protagonista del romanzo di Peter Hoeg, *Il senso di Smilla per la neve*[6], da cui è stato tratto anche un film, in cui questa scena è riportata quasi con le stesse parole. Una matematica danese, appassionata di ghiacci e della Groenlandia, Smilla, che investiga sulla morte di un ragazzino eschimese. I matematici con la loro mente fredda e calcolatrice sono molto abili come investigatori, o come criminali.

Già i greci avevano incontrato problemi che riguardavano i numeri, come per esempio la proporzione aurea φ non esprimibile tramite frazioni. Un problema nasce subito con il numero 1; se prendete un quadrato di lato 1, quanto è lunga la diagonale?

Platone nel dialogo *Teeteto* scrive che fu Teodoro di Cirene, maestro suo e di Teeteto, il primo a dimostrare l'irrazionalità delle radici quadrate degli interi non quadrati da 3 a 17 incluso[7].

> TEETETO: Ecco: il nostro Teodoro ci disegnava certe figure sulle potenze, per esempio su quella di tre piedi [quadrati] e su quella di cinque, dimostrando che codeste potenze, rispetto alla lunghezza [del lato], non sono commensurabili con l'unità del piede; e così, trascegliendo via via ogni potenza, arrivò fino a quella di diciassette piedi; e qui si fermò... tutta la serie dei numeri dividemmo in due classi: ogni numero il quale ha la possibilità di derivare dalla moltiplicazione fra loro di due fattori eguali,

[6](Hoeg, 1992).
[7](Platone, 1966a).

lo rassomigliammo nella figura a un quadrato, e lo chiamammo numero quadrato ed equilatero.[8]

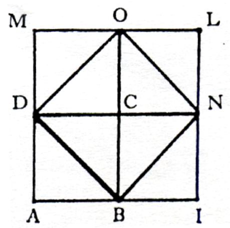
Nel dialogo *Menone* Platone fa discutere Socrate e il servo di Menone[9]:

SOCRATE: Guarda un po': qual è la dimensione di questa superficie?

SERVO: Non capisco.

SOCRATE: Ciascuna delle quattro linee non taglia in due parti uguali ciascuno dei quattro quadrati? O no?

SERVO: Sì.



SOCRATE: E quante di queste metà vi sono all'interno di questo quadrato [BDON]?

SERVO: Due.

SOCRATE: E cosa è il quattro in rapporto al due?

SERVO: Il doppio.

SOCRATE: Quanti sono, dunque, i piedi di questo quadrato [BDON]?

SERVO: Otto.

SOCRATE: E su quale linea è costruito?

SERVO: Su questa [DB].

SOCRATE: Cioè su quella che va dall'uno all'altro angolo del quadrato di quattro piedi [ABCD]?

SERVO: Sì.

SOCRATE: Codesta linea i sofisti la chiamano diametro (è la diagonale). E, se tale è il suo nome, diremo, o servitorello di Menone, che, come tu sostieni, è sulla diagonale che si costruisce la superficie doppia.

SERVO: Esattamente.

Il problema della $\sqrt{2}$ viene aggirato in modo geometrico, con quelli che nel *Timeo* sono chiamati i numeri quadrati: area quadrato di lato 1 + area quadrato di lato 1 = area quadrato di lato 2 (il teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli). È questo il motivo per cui ancora oggi chiamiamo quadrati e cubi un numero moltiplicato per se stesso due o tre volte.

Che numero è $\sqrt{2}$? È un numero irrazionale, un numero reale, così come φ, la famosa proporzione aurea. I greci evitarono di utilizzare tali numeri usando metodi geometrici e la

[8]Le potenze di cui parla Teeteto non sono altro che le radici quadrate che sono rappresentate da numeri irrazionali, come è il caso di $\sqrt{2}$. Il problema di come si sia giunti alla scoperta dei numeri irrazionali e in quale epoca non è risolto. Probabilmente sono stati i Pitagorici.

[9](Platone, 1966b).

teoria delle proporzioni nelle loro dimostrazioni. Ci vorranno più di duemila anni perché i numeri irrazionali vengano compresi a fondo.

Ovviamente i numeri sono tanti e, come già diceva Smilla, altri numeri, altri problemi.

> – Dimmi, hai capito questa faccenda?
>
> – Quale faccenda?
>
> – Quella dei numeri immaginari.
>
> – Sì. Non è mica tanto difficile. Tutto quello che occorre ricordare è che la radice quadrata di meno uno è l'unità con cui devi calcolare.
>
> – Ma è proprio questo. Voglio dire, quest'unità non esiste. Ogni numero, positivo o negativo che sia, elevato al quadrato dà una quantità positiva. Dunque non può esistere un numero reale che sia la radice quadrata di una quantità negativa.
>
> – Giusto; ma perché non si dovrebbe tentare lo stesso di estrarre la radice quadrata di un numero negativo? Naturalmente non può produrre un valore reale (nel senso di numero reale) e perciò si chiama immaginario. È come dire: qui sta sempre seduto qualcuno, perciò anche oggi mettiamogli una sedia, e anche se nel frattempo è morto continuiamo come se venisse.
>
> – Ma come si può, sapendo con certezza, con certezza matematica, che è impossibile?
>
> – Be', si continua a comportarsi come se non fosse così... Ma la cosa strana è appunto che con quei valori immaginari o in qualche modo impossibili si possano tuttavia compiere le ordinarie operazioni e alla fine ottenere un risultato tangibile!...
>
> Ma non c'è lo stesso qualcosa di strano? Come lo debbo esprimere? Prova a pensarci. In un calcolo così tu incominci con numeri solidi che rappresentano metri o pesi o qualcos'altro di tangibile, o almeno sono numeri reali. Alla fine del calcolo, i risultati sono anche quelli numeri reali. Ma questi due gruppi di numeri reali sono collegati da qualcosa che semplicemente non esiste... Per me, questi calcoli mi fan girare la testa, come se conducessero dio sa dove. Ma quel che mi fa rabbrividire è la forza contenuta in un simile problema, una forza che ti tiene così saldamente che alla fine atterri sano e salvo dall'altra parte.
>
> – Parli già quasi come il nostro prete...

Il dialogo si svolge tra il giovane Törless e il suo amico Beineberg nel racconto di Musil *I turbamenti del giovane Törless*[10]. Quella lezione sui numeri immaginari risveglia nel protagonista «una venerazione per la matematica, che improvvisamente aveva cessato di essere una materia morta per diventare qualcosa di molto vivo».

Un legame tra il contare e il raccontare che molto esplicitamente ha più volte espresso Peter Greenaway, regista tra l'altro del film *Drowning by Numbers* (affogare con i numeri, il titolo italiano, in cui si perde il sapore numerico, era *Giochi nell'acqua*). Da sempre affascinato dai numeri, sin dai primi film. In un lungo articolo dal titolo *Come costruire un film*[11], Greenaway ha descritto molto chiaramente come è nato l'interesse per i numeri e per le griglie numeriche che ha utilizzato nei suoi film. Non a caso aveva intitolato *Fear of Drowning by Numbers* (in italiano *Paura dei numeri*) un suo libro dal sottotitolo *100 pensieri sul cinema*. Qual è il ruolo privilegiato dei numeri nel cinema[12]?

---

[10](Musil, 1964).

[11](Greenaway, 2000).

[12](Greenaway, 1993).

> Contare è il modo più semplice e primitivo di narrare – 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 – una storia con un principio, un centro, una fine e un senso della progressione – che culmina in un finale a due cifre –, uno scopo realizzato, un epilogo raggiunto.

L'esigenza che aveva Greenaway era di ricercare qualcosa di più sostanziale della narrazione per tenere insieme il vocabolario del cinema:

> Ho costantemente ricercato, citato e inventato principi organizzatori che riflettessero il passare del tempo con più successo della narrazione, che codificassero il comportamento più in astratto che nella narrazione e adempissero a questi compiti con una qualche forma di distacco appassionato. [Per far questo] i numeri aiutano. I numeri possono significare strutture definibili, facilmente comprensibili in tutto il mondo.

2 L'infinito dei numeri

[. . .]
E il naufragar mi è dolce in questo mare
Giacomo Leopardi, *L'infinito*

I numeri di cui si è parlato sinora sono in gran parte i numeri interi positivi, sono questi i numeri che hanno affascinati artisti e poeti. Altro fascino di questi numeri, questa loro proprietà che se si aggiunge ad un numero intero positivo un altro intero positivo, si può continuare cercando di raggiungere l'inarrivabile infinito. I numeri interi positivi sono infiniti. Ma si fa presto a dire infiniti. Ce ne sono tanti di tipi di infinito. Ed uno dei primi che pone questi problemi è Galileo Galilei ne i *Dialoghi su due nuove scienze*[13].

SIMPLICIO: Qui nasce subito il dubbio, che mi pare insolubile: ed é , che essendo noi sicuri trovarsi linee una maggiore dell'altra, tutta volta che amendue contenghino punti infiniti, bisogna confessare trovarsi nel medesimo genere una cosa maggior dell'infinito, perché la infinità de i punti della linea maggiore eccederà la infinità de i punti della minore. Ora questo darsi un infinito maggior dell'infinito mi par concetto da non poter esser capito in verun modo.

SALVIATI: Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito attorno a gl'infiniti, dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed eguaglità non convenghino a gl'infiniti, de i quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all'altro [. . .]. Io suppongo che voi benissimo sappiate quali sono i numeri quadrati e quali i non quadrati.

SIMPLICIO: So benissimo che il numero quadrato é quello che nasce dalla moltiplicazione d'un altro numero in se medesimo: e così il quattro, il nove, ecc., son numeri quadrati, nascendo quello dal due, e questo dal tre, in se medesimi moltiplicati.

SALVIATI: Benissimo: e sapete ancora, che sì come i prodotti si dimandano quadrati, i producenti, cioè quelli che si multiplicano, si chiamano lati o radici; gli altri poi; che non nascono da numeri multiplicati in se stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissime: non é così?

SIMPLICIO: Non si può dir altrimenti.

SALVIATI: Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi é numero alcuno che

[13](Galilei, 1938).

non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le lor radici, e radici son tutti i numeri; e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati. E pur tuttavia si va la moltitudine de i quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto a maggior numeri si trapassa; perché sino a cento vi sono dieci quadrati, che é quanto a dire la decima parte esser quadrati, in diecimila solo la centesima parte son quadrati, in un milione solo la millesima: e pur nel numero infinito, se concepir lo potessimo; bisognerebbe dire, tanti esser i quadrati quanti tutti i numeri insieme.

SAGREDO: Che dunque si ha da determinare in questa occasione?

SALVIATI: Io non veggo a che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine dé quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gli infiniti, ma solo nelle quantità terminate. E però quando il Sig. Simplicio mi propone più linee diseguali, e mi domanda come possa essere che nelle maggiori non siano più punti che nelle minori, io gli rispondo che non ve ne sono né più né manco né altrettanti, ma in ciascheduna infiniti: o veramente se io gli rispondessi, i punti nell'una esser quanti sono i numeri quadrati, in un'altra maggiore quanti tutti i numeri, in quella piccolina quanti sono i numeri cubi, non potrei io avergli dato soddisfazione col porne più in una che nell'altra, e pure in ciascheduna infiniti? [...]

SALVIATI: E così dal vostro ingegnoso discorso si conclude, gli attributi di maggiore o minore o eguale non aver luogo non solamente tra gl'infiniti, ma né anco tra gl'infiniti e i finiti.

A partire dal numero intero positivo uno si possono costruire i numeri interi positivi aggiungendo sempre una unità al numero precedente, senza fine, l'insieme di questi numeri si chiama l'insieme dei numeri naturali e si indica con $\mathbb{N}$. Da questi numeri si costruiscono i razionali, indicati dalla lettera $\mathbb{Q}$, le frazioni. Quanti sono i razionali? Esattamente tanti quanti sono gli interi, si possono cioè *contare*. Cosa non ovvia. Ed il salto successivo è che se consideriamo tutti i punti che ci sono su una retta e cerchiamo di contarli, i numeri interi e quelli razionali non bastano. Sono *molti di più* i punti della retta, come aveva intuito Galilei. Tanti di più che non si possono contare. Si tratta dei numeri reali che sono tanti quanti i punti di una retta, ma anche tanti quanti sono i punti di un segmento della retta, perché, come aveva ancora intuito Galilei la regola dell'essere contenuto ed avere maggior numero di elementi non vale per gli insiemi infiniti. Uno dei paradossi dell'infinito, uno dei tanti.

Paradossi a cui era dedicato lo spettacolo *Infinities* di Luca Ronconi, andato in scena al Piccolo Teatro di Milano nel 2002 e 2003.

Dunque sono infiniti ma contabili gli interi positivi, e così i pari, i dispari, tutte le frazioni. E quanti sono i razionali all'interno dell'insieme dei numeri reali? Sono praticamente nulla, una polvere. Se si mettessero tutti i numeri razionali su una retta, tra un punto e il successivo punto razionale, per esempio tra ${}^{1}/_{2}$ e 3, ci sarebbero tanti punti reali quanto ve ne sono su tutta la retta, altro paradosso dell'infinito. Tutti i numeri razionali hanno un peso eguale a zero nell'insieme di tutti i numeri reali. La cosa interessante da osservare è che i computer, per loro natura strumenti di calcolo di altissima precisione, che possono fare conti strabilianti in pochissimi istanti, usano solo i numeri razionali, quella nuvola all'interno dei reali...

Problemi non banali quelli dell'infinito, della numerabilità, della calcolabilità. Se i numeri, almeno alcuni di essi, sono stati introdotti migliaia di anni fa nella storia dell'umanità, è sorprendente notare che «uno dei fatti più sorprendenti della storia della matematica è che la fondazione logica dei numeri reali sia stata edificata solo alla fine del XIX secolo.»

Per capire la natura dei numeri reali, dandone una definizione costruttiva senza occuparsi di cosa i numeri *siano* (e di numeri ne esistono infinite altre varietà!) ci sono voluti migliaia di anni, come osserva Morris Kline nella *Storia del pensiero matematico*[14].

Magia, mistero, potenza, fascino. Il numero non poteva non essere presente nell'immaginario degli artisti. Se non possiamo definire questi enti così potenti e misteriosi, se non riusciamo a renderli con parole, ecco allora che l'arte ci viene in aiuto. L'arte dei numeri, o meglio i numeri dell'arte. I numeri diventano i protagonisti, senza descrizioni, senza definizioni, i numeri stessi, le loro immagini. Ed ecco allora i numeri e l'arte.

[14](Kline, 1991).

3 I numeri dell'arte

> E' il numero in sé, la rappresentazione grafica che nel tempo se ne è data, la forma di volta in volta assunta, l'assolutezza del suo icastico manifestarsi che ha orientato la selezione delle opere. Oggetto e soggetto di dipinti, sculture, disegni, video, film, fotografie, istallazioni, il numero. Potenziale estetico circoscritto al configurarsi del numero come entità astratta, autosufficiente, in sé conchiusa e pertanto assoluta.[15]

Parole di Marco Pierini, curatore con Lorenzo Fusi, della mostra *Numerica* al Palazzo delle Papesse tenutasi a Siena nel 2007. Subito dopo il palazzo delle Papesse è stato chiuso.

Mostra che si apriva con i *Numeri innamorati* di Balla che comparivano anche sulla copertina della mostra di Stoccarda del 1997 *Magie der Zahl* (Magia del numero), un grande supermercato dei numeri nell'arte, numeri, numeri, senza alcun criterio. Con Balla siamo nel 1924, i numeri sono comparsi nei collage dei Cubisti, nelle opere di Boccioni, grande appassionato della quarta dimensione e delle nuove geometrie. Marinetti aveva scritto che l'amore della precisione e della brevità essenziale gli aveva fornito *naturalmente* il gusto dei numeri, che vivono e respirano come esseri vivi nella nostra nuova sensibilità numerica. Nuovi i numeri, pur antichissimi, simbolo della modernità seppur immutabili. Il fascino dei numeri.

> Contare, l'unica cosa che si poteva essere certi di far bene... I numeri mi danno la libertà di pensare a qualcos'altro, sono stati già inventati e non appartengono a nessuno.

ha dichiarato l'artista Mel Bochner[16], presente alla mostra di Siena con *Counting: 0-1- (#6)*. Una mostra in cui aveva molto spazio l'ironia, il gioco dei numeri.

Non poteva mancare un piccola parte legata alla sezione aurea ed alla successione di Fibonacci. In una stanza dell'antico palazzo decorata con le parole *Utilità, ordine, prontezza*, Mario Merz, con il ricordo di quei numeri che inseguivano il coccodrillo sulle rampe a spirale del Guggenheim di New York.

E non si può fare a meno di accennare al fascino dei numeri primi. Il fatto che i numeri primi sono infiniti è uno, se non il primo teorema significativo che abbia dimostrato l'umanità. Se ne trova la dimostrazione nei volumi di Euclide.

> Si era creata in modo nitido nelle nostre menti un'immagine tangibile dei numeri primi che poi ognuno di noi tre aveva elaborato a suo modo. Bastava che lui pronunciasse le parole numero primo perché noi ci guardassimo negli occhi per scambiarci un cenno amichevole di assenso... L'ordine matematico è così bello proprio perché non ha utilità nella vita reale. Scoprire la vera natura dei numeri primi, non rende più facile la vita né fa guadagnare soldi. Certo, per quanto gli studiosi tentino di voltare le spalle al mondo reale, alla fine i casi in cui le scoperte della matematica trovano un'applicazione pratica sono molti... Persino i numeri primi sono stati utilizzati come base dei codici segreti e utilizzati in guerra. Ma questo è scandaloso! Il vero scopo della matematica non è questo, bensì la scoperta della verità... Fu così che un ex matematico sulla soglia della vecchiaia, una ragazza madre quasi trentenne e suo figlio che frequentava le elementari riuscirono a cenare insieme senza imbarazzarti silenzi.

[15](Pierini and Fusi, 2007).
[16](Ogawa, 2008).

Un libro diverso dai tanti libri in cui i protagonisti sono i matematici. Il protagonista è sì un matematico, ma quello che l'autrice Yoko Ogawa in *La formula del professore*[17] vuole raccontare non è solo la solitudine, l'isolamento, il faticoso mestiere di vivere, ma la passione, il fascino per la matematica. Un libro molto suadentemente giapponese.

E la storia, la storia dei numeri continua, fortunatamente senza fine...

NdR: Alcuni paragrafi del presente contributo sono già apparsi in Hevelius' Webzine.

[17](Abdolah, 2010).

Riferimenti bibliografici

Abdolah, K. (2010). *Il Messaggero*. Iperborea, Milano. 11

Courant, R. and H. Robbins (1941). *What is Mathematics An Elementare Approach to Ideas and Metods*. Oxford University Press, New York. ed italiana, Boringhieri, Torino 1971. 2

Galilei, G. (1938). *Opere*, Volume II, Chapter Dialoghi delle nuove scienze. Rizzoli. 7

Greenaway, P. (1993). *Fear of Drowings by Numbers*. Editions Dis Voir, Paris. ed. italiana, Paura dei numeri, Editrice il Castoro, 1996. 5

Greenaway, P. (2000). Come costruire un film. In M. Emmer (Ed.), *Matematica e cultura*, pp. 159–171. Sprinter Italia, Milano. 5

Hilbert, D. (1901). Sur le problèmes futurs des mathématiques. In *Compte rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiciens, Paris 1900*, pp. 54–114. Paris, Gauthier-Villars. 2

Hoeg, P. (1992). *Froken Smillas fornemmelse for sne*. Munksgaard/Rosinante, Copenhagen. ed inglese Delta Book, New York, 1995. 3

Ifrah, G. (1983). *La storia universale dei numeri*. Mondadori, Milano. 0

Kline, M. (1991). *Storia del pensiero matematico*. Einaudi, Torino. 9

Lipard, L. and H. Darboven (1973, october). Deep in numbers. *Artforum* (12), 35–36. 1

Musil, R. (1964). *Racconti e teatro*, Chapter I turbamenti del giovane Törless. Einaudi, Torino. 5

Ogawa, Y. (2008). *La formula del professore*. Il Saggiatore, Milano. 10

Peano, G. (1981). Sul concetto di numero. *Rivista di Matematica*. 2

Pierini, M. and L. Fusi (2007). *Numerica, catalogo della mostra, Siena*. Silvana editore, Milano. 10

Platone (1966a). *Opere*, Volume 1, Chapter Teeteto. Laterza, Bari. 3

Platone (1966b). *Opere*, Volume 2, Chapter Menone. Laterza, Bari. 4

A proposito dell'autore

MICHELE EMMER (Milano, 1945) insegna Matematica all'Università di Roma – La Sapienza. È collaboratore del giornale on-line *Galileo*, organizzatore di numerosi convegni e rassegne, regista, curatore dell'edizione italiana di *Flatlandia*, di E. Abbott, (2008) Bollati Boringhieri. Editore delle serie *Mathematics and culture* per Springer, e *The visual mind, art and mathematics* per MIT Press. È autore di numerosi saggi e articoli, su un ambito di interessi che copre la matematica, l'arte, la letteratura. Tra le sue ultime pubblicazioni, segnaliamo, per Bollati Boringhieri, *Numeri immaginari: cinema e matematica* (2011), e *Bolle di sapone, tra arte e matematica* (2009). Info: http://www.mat.uniroma1.it/people/emmer/.

Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

INTERVISTA A ERMANNO BENCIVENGA

Mattia Sorgon

PRESENTAZIONE. Ermanno Bencivenga è professore di filosofia presso la *University of California – Irvine*. I suoi interessi riguardano la logica formale, la storia della filosofia, l'etica e la filosofia politica. Tra i suoi ultimi lavori *La dimostrazione di Dio – Come la filosofia ha cercato di capire la fede*, Arnoldo Mondadori Editore (2009), *La filosofia come strumento di liberazione*, Bruno Mondadori (2010), *La filosofia in cinquantadue favole*, Oscar Mondadori (2011).

Nella sua carriera si è occupato di diversi problemi e tematiche, anche di differenti discipline. Qual è stato il suo percorso formativo? I primi autori che ho letto con passione sono stati Kant e Freud, ancora studente universitario. La mia prima produzione filosofica, invece, è stata in logica formale, soprattutto in logica libera e logica modale. A partire dagli anni ottanta sono tornato a Kant, che è rimasto la mia fonte principale di ispirazione e cui ho dedicato vari libri. Su Freud invece ho scritto pochissimo, limitandomi a tenere corsi su di lui in Italia e in America. Ne ho derivato soprattutto una tendenza alla lettura «sintomatica» dei testi: un testo è un comportamento da interpretare, non una dichiarazione del cui senso sia depositario l'autore.

Quali sono stati i motivi che l'hanno portata a trasferirsi negli Stati Uniti? Ha mai pensato di tornare in Italia? Nel 1977, quando ho deciso di partire definitivamente per l'America, avevo anche un'offerta di lavoro in Italia. Da un lato pesavano i miei legami affettivi e culturali; dall'altro il senso della scoperta e dell'avventura. Quel che ha finito per fare la differenza in una situazione di tale difficoltà è stato un semplice giudizio morale: non approvavo i criteri con cui veniva gestita l'università italiana e venivano reclutati i suoi membri (inclusi i criteri con cui era stato offerto un posto a me), quindi non volevo averci nulla a che fare. Siccome non mi sembra che negli anni questi criteri siano sostanzialmente cambiati, non ho mai avuto intenzione di tornare, se per questo si intende tornare in pianta stabile. Continuo a tenere lezioni e corsi in Italia, quando mi è possibile, e lo faccio con grande soddisfazione perché gli studenti italiani sono i migliori che conosco.

Che cosa pensa della situazione attuale della filosofia in Italia? Ho appena detto che penso un gran bene degli studenti italiani di filosofia. Penso altrettanto bene di molti colleghi poco noti che svolgono un ottimo lavoro professionale. A livelli di eccellenza mi dispiace dire che i migliori ingegni italiani ormai lavorano all'estero e che per converso i soliti noti che imperversano su giornali e altri media sono dei chiacchieroni ridondanti.

AUTORE. Mattia Sorgon. mattia.sorgon@gmail.com

Che cosa pensa si possa fare per migliorarla? Quali suggerimenti proporrebbe per didattica e ricerca? Bisognerebbe forse, senza perdere di vista la nostra competenza storica, risvegliare il senso di come gli autori classici siano ancora partecipi di un dibattito contemporaneo. Il pericolo che vedo, anche nei colleghi migliori, è quello di continuare in una deriva storicistica che trasforma la tradizione in un cimitero.

Con *Parole che contano* (2004) propone un vero e proprio dizionario filosofico che tenta di chiarire e precisare molti termini di uso quotidiano. Che importanza ha per lei un utilizzo rigoroso del linguaggio filosofico? La semantica è per me terreno di scontro politico: ideologie e progetti diversi sono costantemente in lotta per appropriarsi del senso delle parole, e soprattutto di parole fondamentali come «libertà» o «piacere». Questa lotta è tanto più pericolosa quanto più è implicita e non ci si rende neanche conto di combatterla. Occorre dunque fare uno sforzo altrettanto costante per chiarire, prima di tutto a sé stessi, i propri sensi e le loro implicazioni teoriche e operative.

Ritiene necessario, o quantomeno importante, lo studio della logica e la cura della precisione argomentativa per uno studioso di filosofia? La pratica filosofica non è altro che pratica logica: la filosofia non è fatta di opinioni ma di legami concettuali e strutture argomentative. Quindi *l'esercizio* della logica è non solo necessario ma definitorio per l'attività filosofica. La consapevolezza teorica delle modalità di tale esercizio che si acquisisce studiando la disciplina della logica non mi sembra necessaria, né sufficiente per fare bene filosofia, per quanto possa certo essere utile; così come lo studio della grammatica non mi sembra necessario né sufficiente, ma può essere utile, per parlare bene l'italiano.

Ha sviluppato le sue ricerche utilizzando vari stili di esposizione: ricostruzione storica, forma dialogica, saggio, trattato e persino aforismi. Ritiene possibile discutere gli stessi problemi attraverso diversi approcci oppure pensa che vi sia una relazione esclusiva tra i problemi trattati e il modo in cui vengono affrontati? In accordo con grandi rappresentanti della tradizione italiana (Leopardi, per dirne uno) penso che lo stile sia il corpo stesso del pensiero, quindi che un dialogo, un saggio o una raccolta di aforismi non possano affrontare «gli stessi» problemi perché i problemi cambiano a seconda di come vengono affrontati. Ritengo invece, in generale, che lo sviluppo del mio pensiero sia sempre avvenuto in modo «laterale» piuttosto che gerarchico, da un tema a un altro a esso collegato, e che molti di questi collegamenti, per me, siano stati stilistici prima che «contenutistici».

Lei si è interessato anche di storia della filosofia, *La rivoluzione copernicana di Kant* (2000) solo per citare uno dei suoi lavori. Che cosa significano per lei lo studio, la didattica e la ricerca storico-filosofici? Vi sono, se ne riscontra, differenze tra l'Italia e gli Stati Uniti nell'affrontare questa disciplina? La storia della filosofia è il più importante strumento di lavoro che un filosofo abbia a disposizione. Nessuna generazione può produrre che una minuscola frazione del tesoro di idee, ragionamenti e proposte che si sono depositati nella storia. Perché questo strumento possa essere utilizzato al meglio, però, bisogna capire che, come ben diceva Benedetto Croce, tutta la storia è storia contemporanea e dunque evitare, come suggerivo prima, di imbalsamare gli autori del passato. Negli Stati Uniti ho generalmente avvertito meno questa tendenza mortifera, sia pure a costo di qualche ingenuità. Negli ultimi dieci/quindici anni, tuttavia, ho visto emergere anche lì «studiosi» con lo stesso atteggiamento notarile cui ero abituato in Italia.

In *La filosofia in cinquantadue favole* (2011) vengono presentati diversi temi e problemi filosofici in forma di racconto. Quanto è importante per un filosofo, e per la filosofia in toto, la divulgazione verso il grande pubblico? Pensa sia possibile una divulgazione filosofica che non utilizzi un linguaggio tecnico o specialistico? Rifiuto il termine «divulgazione» applicato al mio lavoro e il progetto culturale che quel termine esprime (anche se mi rendo conto che agli editori, compresi i miei editori, fa spesso comodo usarlo). «Divulgazione» suggerisce una cultura prodotta altrove e disseminata in pillole a un volgo ignorante. Io non divulgo, comunico. Il motivo per cui chiunque oggi può entrare in libreria, comprare le *Meditazioni* di Cartesio o i *Dialoghi* di Hume e leggerli con profitto è che questi capolavori del pensiero occidentale sono scritti in un linguaggio che a distanza di secoli rimane comunicativo. Io cerco di fare lo stesso: di fare filosofia, in stili diversi come ho detto prima e in modo da poter essere capito.

Nella sua webpage personale sostiene che è interessato a una filosofia «che tratti problemi centrali per la condizione umana». Che cosa intende precisamente? Una caratteristica per me frustrante della riflessione filosofica contemporanea è che essa manifesta molta più profondità, articolazione e ingegnosità su temi relativamente ristretti e specialistici, mentre temi come la nostra convivenza, il nostro futuro o il nostro ambiente sono spesso trattati con un'opinionistica da settimanale illustrato. Reclamo una filosofia che metta tutta la sua ricchezza concettuale al servizio di temi centrali come quelli che ho menzionato.

Che rapporto vi è, o vi può essere, tra la filosofia politica, l'etica e la realtà attuale e contemporanea? Ritiene che la ricerca filosofica in queste due discipline possa dare un contributo rilevante alla discussione pubblica? L'essere umano è un essere pensante, quindi è auspicabile che il pensiero entri come elemento di giudizio e di scelta nei suoi percorsi esistenziali. Quando questo non accade, siamo testimoni di una «ricerca filosofica» autoreferenziale da un lato e di una «discussione pubblica» acefala dall'altro. Una filosofia che non abdichi alla sua funzione di chiarimento e approfondimento di questioni chiave e un pubblico che non abdichi alla sua umanità sono indispensabili per uscire da questa dolorosa tenaglia.

Peer Review Journal Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 © http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

INTERVISTA A GABRIELE LOLLI

Carlo Monti

PRESENTAZIONE Professore ordinario di Filosofia della matematica alla Scuola Normale dal 2008, si è laureato in matematica all'Università di Torino. Si è specializzato in Logica matematica alla Yale University sotto la guida del prof. Abraham Robinson.

Ha insegnato al Politecnico di Torino e nelle università di Salerno, Genova e Torino, per i corsi di laurea in matematica, informatica, filosofia e psicologia.

I suoi interessi di ricerca hanno riguardato inizialmente la teoria assiomatica degli insiemi, quindi le applicazioni della logica all'informatica, all'Intelligenza Artificiale e alle scienze cognitive e, a partire dagli anni ottanta, la storia e la filosofia della matematica e della logica. Attualmente i suoi studi sono rivolti alla dimostrazione matematica.

Tra le pubblicazioni più significative sono da menzionare: la raccolta di saggi Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche, il Mulino, Bologna, 1985; la cura dell'edizione italiana di A. M. Turing, *Intelligenza meccanica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1994; *Il riso di Talete*, Bollati Boringhieri, Torino, 1998, *Filosofia della matematica*, il Mulino, Bologna, 2002; *Da Euclide a Gödel*, il Mulino, Bologna, 2004; *QED Fenomenologia della dimostrazione*, Bollati Boringhieri, Torino, 2005; *Sotto il segno di Gödel*, il Mulino, 2007; *Discorso sulla matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 2011; *La guerra dei trent'anni (1900-1930)*, ETS, Pisa, 2011.

Professor Lolli, a quali argomenti si sta interessando in questo momento? Un obiettivo generale a cui mi sto dedicando è quello di dare un contributo alla comprensione realistica delle vicende intellettuali che negli ultimi 150 anni hanno plasmato le diverse facce della matematica che si sono succedute, il che vuol dire in pratica la nascita della matematica astratta, lo sviluppo della metamatematica, la comparsa del calcolatore. Ho appena pubblicato una storia del programma di Hilbert e della logica matematica negli anni Venti, in *La guerra dei trent'anni*, ETS, Pisa, settembre 2011; forse l'anno prossimo sarà completata una ricostruzione della nascita della teoria degli insiemi, per le edizioni della Normale. Non è accettabile che continuino a tramandarsi versioni caricaturali di vicende di tale importanza e portata: personaggi schematici come burattini, geni a cui sono messe in bocca banalità, le banalità del facilmente comprensibile.

AUTORE. Carlo Monti. carlomonti83@gmail.com

So bene che anche i miei resoconti non saranno neutri né completi, ma almeno che si evitino le più grossolane incongruenze. Quanti sanno che la presentazione del formalismo da parte di von Neumann alla Conferenza di Königberg del 1930 descriveva il programma di Hilbert come la ricerca di una dimostrazione di conservatività dei concetti transfiniti rispetto a quelli finiti?

Anche le reazioni all'ortodossia paludata delle scuole (logicismo, formalismo, intuizionismo, secondo la classificazione impostasi subito dopo il 1930), e i tentativi di rivitalizzare la filosofia della matematica secondo il famoso manifesto di Reuben Hersh del 1976, che ha aperto la strada alle filosofie umanistiche della matematica, sono inficiate dal fatto che si prende come bersaglio polemico qualcosa di irreale; non si parla della matematica ma dell'immagine della matematica imputata alle scuole; si finisce così in polemiche ideologiche e sterili.

Un altro argomento più specifico che mi interessa ora, nell'ambito già frequentato della problematica della dimostrazione, è quello delle dimostrazioni fisiche, cioè le dimostrazioni (di teoremi matematici) che usano concetti e modellizzazioni fisiche del problema matematico. Si trovano spunti interessanti quasi solo nella scuola matematica russa, o degli emigrati russi, ma l'argomento è importante per i suoi riflessi sulla didattica negli anni di passaggio dalla matematica concreta a quella simbolica.

Esistono differenze (di approccio, di metodo, di obiettivi. . .) fra una filosofia della matematica analitica ed una "non-analitica"? Secondo lei una tale distinzione ha senso in filosofia della matematica? La domanda mi fa venire in mente l'apertura dell' *Enquiry Concerning Human Understanding* (1748) di David Hume, dove sono distinte due filosofie: una, facile [*easy*], è rivolta ai sentimenti delle persone per convincerle, e si basa su apologhi, esempi, retorica accattivante che stimola l'immaginazione e muove gli affetti. L'altra, difficile e profonda, è rivolta alla comprensione [*understanding*] degli esseri umani, alla ricerca dei principi che regolano l'intelletto [*understanding*] e che eccitano i sentimenti. I filosofi della prima specie vogliono solo rappresentare il senso comune con colori piacevoli, e confermarlo, e sono loro che hanno successo, non coloro che ragionano in astratto.

Non so se esista una definizione di filosofia analitica della matematica, ma si può supporre che comprenda in modo caratterizzante le analisi che fanno uso degli strumenti e dei risultati della ricerca logica; se è così, essa non può essere portatrice di messaggi rassicuranti, perché la logica nel corso dell'ultimo secolo ha messo in luce soprattutto limiti, aporie, vicoli ciechi. La filosofia facile, a prescindere dalla sua sofisticazione, è una filosofia consolatoria, che pretende di essere in grado di assicurare che tutto quello che il senso comune crede a proposito della matematica è vero e viene fondato da essa, magari in modi del tutto contrapposti: se si accetta la presentazione (talvolta ricostruzione) che viene offerta, si sa con soddisfazione che cosa sono gli oggetti matematici, e come possiamo conoscerli, e che tipo di certezza acquisiamo, e così via illudendosi.

Cellucci (*La Filosofia della Matematica del Novecento*, Laterza, 2007) sostiene che tutta (o gran parte) della filosofia della matematica sia minata alla base dal teorema di Gödel in quanto quest'ultima concepisce erroneamente la matematica come "metodo assiomatico". Secondo l'autore, invece, questa caratteristica della matematica (il metodo assiomatico) non sarebbe poi così essenziale. Che posto occupa, secondo Lei, il teorema di Gödel nella filosofia della matematica? È veramente così invasivo? Non credo che si possa riassumere in questo modo il pensiero di Cellucci, sarebbe un po' troppo semplicistico. La filosofia della matematica non può concepire la matematica secondo le sue preferenze; può concepirla solo come è, nella varietà dei suoi aspetti. È un fatto storico che dalla fine dell'Ottocento i matematici hanno scelto in modo quasi esclusivo l'organizzazione assiomatica per le loro teorie, ma hanno anche dovuto inserire nella loro logica da una parte l'infinito e dall'altra la calcolabilità effettiva; è un fatto storico inoltre che i più consapevoli tra i matematici si sono dedicati a chiarire il significato e i problemi che nascono dall'assiomatizzare concetti astratti. Ma i matematici non si dedicano prevalentemente a questo tipo di riflessione, anzi lo fanno solo eccezionalmente; normalmente, e nella quasi loro totalità, fanno altro. Se una filosofia della matematica si interessa solo del metodo assiomatico è certo molto limitata; si può legittimamente sostenere che la filosofia della matematica debba occuparsi anche o soprattutto dell'altro. Ma il teorema di Gödel si rischia di incontrarlo ugualmente, perché esso non ha a che fare tanto con l'attività di assiomatizzazione, quanto con alcune nostre capacità intellettuali che appaiono in conflitto e inconciliabili.

Il teorema di Gödel (il primo teorema di incompletezza) comporta che gli enunciati aritmetici veri nella struttura standard dei numeri naturali non possono essere assiomatizzati in modo effettivo, non formano un insieme semidecidibile (oltre a dire altre cose più specifiche). Questo fatto potrebbe anche esaurirsi lì, ma ha delle diramazioni o implicazioni inquietanti.

La struttura dei numeri naturali infatti è ben definita, in modo categorico (secondo un teorema di Dedekind), e tuttavia risulta sfuggente, secondo il teorema di Gödel. Se dalla definizione globale della struttura passiamo alle proprietà dei suoi elementi, ed elenchiamo quelle che conosciamo, che in ogni momento sono in numero finito o date da un numero finito di schemi di generazione, e le organizziamo in modo assiomatico in modo da concepire tutte le loro possibili conseguenze, non riusciamo a caratterizzare la struttura (cioè ce ne sono altre, non isomorfe, che soddisfano tutte le proprietà che abbiamo dimostrato o che sono così dimostrabili).

Pare che ci sia un'inesauribilità nascosta, che non si riesce a controllare; per quanto si raffini la descrizione con proprietà assodate, vere, ce ne è qualcuna che si sottrae alla descrizione e che non è nemmeno potenzialmente recuperabile con le capacità deduttive logiche, e se crediamo di individuarla ed aggiungerla ai nostri assiomi, la situazione si ripete.

Che tipo di definizione è quella, che ha una tale caratteristica di inesauribilità? Perché non potremmo mettere lei come unico assioma? Qualcuno ritiene che sia possibile e legittimo, soprattutto se pensa come i categorialisti a una trattazione che ha come oggetto le strutture piuttosto che i loro elementi. Ma è una definizione che ha un tipo di non effettività estremo, riferendosi all'insieme dei sottoinsiemi della struttura infinita. Per usarla nella deduzione delle proprietà dei numeri, invece che solo come definizione della struttura, dovremmo adottare una logica di cui non sappiamo elencare le regole.

Un matematico che lavori in altri campi può ugualmente incontrare questo fenomeno, lo incontrano per esempio quelli che studiano teoria degli insiemi e non riescono a determinare la cardinalità del continuo; e altre situazioni analoghe si sono sperimentate, con i numeri reali per esempio.

Questa è una delle cattive notizie accennate sopra; apparentemente, abbiamo capacità definitorie, per mezzo di concetti che sembrano non ambigui e fondamentali, che non vanno d'accordo con le nostre capacità deduttive. In altri termini, fondiamo le teorie di base con una logica che non è meccanizzabile, e questo proprio nell'epoca della meccanizzazione.

Tuttavia l'inesauribilità è una caratteristica positiva; il teorema di Gödel (questa volta in combinazione con il secondo) ci dice che tale inesauribilità è una condizione vitale, come amava sottolineare Gödel, quasi genetica: per la soluzione di problemi, occorre utilizzare concetti astratti (rispetto ai dati del problema); i concetti astratti, se ora generalizziamo con cautela, diventano generatori di conoscenze e tecniche manipolabili in modo effettivo; la contemplazione delle conoscenze finora raggiunte ci spinge ad aggiungere nuovi principi a quelli dati, attraverso la considerazione della loro non contraddittorietà. Il concetto stesso di astratto potrebbe essere definito in questo modo, come riflessione metateorica sugli strumenti disponibili.

Non è detto che quello descritto sia l'unico processo di ampliamento delle assunzioni matematiche; tanti problemi vengono affrontati e risolti con idee nuove perché la direzione della ricerca spinge in una determinata direzione, e le soluzioni non hanno nulla a che vedere con la dialettica dell'incompletezza. Tuttavia un filosofo non può restare indifferente di fronte a fenomeni come questo. Anzi, il teorema di incompletezza potrebbe essere un sostegno per una filosofia della matematica centrata sull'inesauribilità; Zermelo sosteneva che la generazione di ordinali e di modelli della teoria degli insiemi di base era inesauribile per la natura dello spirito umano, ma Gödel ha fornito una spiegazione e una tecnica quasi meccanica per la manifestazione di tale inesauribilità.

Che posto occupa il problema ontologico nella filosofia della matematica e qual è la sua importanza? Il problema ontologico è stato sviscerato in tutti i suoi risvolti, da Carnap e Quine in avanti; per chi non lo considera superato, la dicotomia nominalismo/realismo si è arricchita con concetti matematici nuovi, per esempio quello di struttura; ma restano sostanzialmente le alternative che si sono presentate fin dall'inizio dell'età contemporanea: o si accetta solo il finito, o meglio l'infinito potenziale, oppure il numerabile, oppure l'infinito attuale. Si potrebbe dire che si è arrivati non a un punto morto, ma a un punto in cui si sa tutto di tutte le alternative, e non c'è alcun esperimento cruciale per decidere per una soluzione o l'altra. Se possibile, si cerca di evadere il problema, immaginando giustificazioni della matematica che non impegnino all'esistenza delle strutture, né nel mondo reale né in quello platonico (per esempio Chihara ha fatto questo tentativo).

Alcune volte può sembrare che i vari dibattiti filosofici siano semplicemente (semplicisticamente) una questione di scelte, di posizioni assunte a priori e giustificate a posteriori. Secondo Lei quali sono, se esistono, i criteri che dovrebbero guidare la valutazione delle varie posizioni in gioco? Esistono dei "fatti" di cui una teoria filosofica debba dare ragione per essere ritenuta valida? A ben guardare, le varie filosofie della matematica non si si confrontano con gli stessi problemi; nascono da sensibilità diverse per diversi aspetti della matematica; quindi ipostatizzano un elemento e ne fanno il nucleo essenziale e definitorio della matematica. I neo-empiristi per esempio sono attratti dalle attività di ricerca sperimentale e di formazione di congetture, e arrivano a dire che le verità matematiche sono fondate induttivamente; i sociologi della conoscenza invece sono attenti alla determinazione sociale, e concludono che la dimostrazione è una convenzione; le due problematiche si sfiorano ma non sono rivolte allo stesso oggetto. In pratica tutte (o quasi) le filosofie mettono in evidenza qualche fattore importante dell'attività matematica; questo non significa che sia consigliabile adottare una posizione sincretista, che prende quello che di buono c'è in ciascuna posizione, perché la sintesi dei vari aspetti è proprio quello che fa della matematica la matematica, la sintesi è nella matematica, non una sintesi esterna che possa essere fatta dalla filosofia.

I fatti di cui una teoria filosofica della matematica dovrebbe dare ragione sono ovviamente, verrebbe da dire, i fatti matematici, cioè le ricerche, i teoremi, le teorie, i concetti e le loro relazioni, la costruzione delle dimostrazioni, l'invenzione di strategie argomentative, i diversi tipi di pensiero che sono attivati. Ma cosa vuol dire darne ragione? In termini di un altro sistema di concetti? O potrebbe significare spiegare come i diversi fatti si integrano per la riuscita dell'obiettivo generale? Senonché non è facile indicare un obiettivo generale: una risposta è che è la conoscenza del mondo, una volta soprattutto fisico, ora anche umano, ma non tutti i matematici sarebbero d'accordo.

La filosofia della pratica matematica, che è la più recente proposta di filosofia della matematica, assume i fatti matematici come proprio oggetto, più esattamente i fatti nel loro farsi. Le ricerche che confluiscono sotto questa etichetta mettono in luce aspetti di estremo interesse di quello che, per tornare a Hume, si potrebbe chiamare il dispiegamento dello *human understanding* nell'attività dei matematici; la varietà delle ricerche per ora è poco omogenea (si va dal ruolo della visualizzazione a quello del calcolatore). Al di là della funzione descrittiva, e del messaggio pluralista, rispetto a metodi, obiettivi, strumenti, strategie messe in atto nella pratica, il denominatore comune vorrebbe essere quello di portare alla luce gli aspetti della pratica dei matematici che hanno una rilevanza filosofica. Il criterio di rilevanza filosofica tuttavia dovrebbe essere dettato, nelle intenzioni, dalla filosofia, non dalla matematica; per ora non è chiaro il denominatore comune di coloro che si riconoscono in questa posizione; genericamente, sembra di poter riconoscere come filosofico l'interesse generico per lo *human understanding* in senso lato, inclusa la psicologia.

Alcuni autori hanno sostenuto che la filosofia della matematica non influenza minimamente il lavoro dei matematici. Questo è vero secondo Lei? Quanto i matematici sono interessati al dibattito sulla filosofia della matematica? Quelli che hanno una filosofia militante, come detto sopra, ovviamente sono influenzati nel loro lavoro dalla loro filosofia; ma sono una minoranza numericamente trascurabile, anche se formano un'*élite* nobile e credo più influente del loro peso numerico; in fondo sono rispettati perché hanno delle convinzioni, sia pure eccentriche, se fanno buona matematica. I matematici *operai* (i cosiddetti *working mathematicians*) non sono interessati e non vogliono sentire parlare di filosofia. Un motivo è che ne hanno sentito parlare male, della filosofia e della logica. Hanno sentito dire, dai resoconti correnti, che i logici volevano formalizzare tutta la matematica, o costringere a svolgerla tutta nella teoria degli insiemi, che i formalisti volevano dimostrarne la non contraddittorietà, ma non si può, e poi che interesse ha, se si incontra una contraddizione si torna indietro e si corregge (diceva Bourbaki), e che cosa importa se una teoria è incompleta, quello che interessa sono i teoremi che si dimostrano. In una parola, i matematici credono che i filosofi, e soprattutto i logici, vorrebbero insegnare a loro come devono fare matematica. Tendono anche a pensare che i filosofi fomentino tempeste in un bicchiere d'acqua, come a proposito della dimostrazione assistita del teorema dei quattro colori. "Lasciateci lavorare", è la reazione comune. La responsabilità di questo atteggiamento, quando non è opportunista come era in Bourbaki, è anche, come si diceva all'inizio, del modo come la storia dei fondamenti è stata tramandata.

Nel Suo ultimo libro (*Discorso sulla Matematica*) traccia dei paralleli tra la pratica matematica e quella letteraria. A Suo parere è possibile (ed auspicabile) un avvicinamento fra questi due ambiti disciplinari? Cosa possono imparare i matematici dai "letterati" (e viceversa)? Io ho sostenuto nel libro che vi è una coincidenza sia tra le capacità che si esprimono nella creatività letteraria e quelle che sono all'opera nella creatività matematica, sia delle qualità estetiche che si godono nei loro prodotti più riusciti. La tesi è illustrata con esempi che confermano le indicazioni di Calvino sui valori della leggerezza, rapidità, esattezza, visibilità e molteplicità. I letterati sono molto più abituati a riflettere sulla letteratura di quanto non lo siano i matematici a proposito della matematica. La società ha affiancato alla letteratura la critica letteraria, un'attività riconosciuta, magari non molto amata dagli artisti, che ha una funzione importante nell'aiutare i fruitori delle opere a capire le ragioni del loro apprezzamento estetico e i motivi del valore di queste opere. Non è un caso che sia stato Calvino a mettere in evidenza quelle caratteristiche, da lui riconosciute o ricercate nelle opere letterarie, che ora, proiettate sulla matematica, illuminano tanti aspetti coinvolti nella costruzione di un pezzo di matematica; aspetti che spesso il matematico stesso non è in grado di esplicitare, ma che fanno sentire anche a chi non è esperto la differenza tra quello che vale e quello che è caduco. Non tutte le dimostrazioni o le idee matematiche ci meravigliano, ci sorprendono nello stesso modo, come non tutte le poesie ci toccano con la stessa intensità. Per esempio una dimostrazione con figure, senza parole, di una formula numerica (si pensi a quella per la somma dei primi n numeri) ci fa provare i brividi del pensiero vero, quello dove si cambiano le carte in tavola (la rappresentazione dei dati), si affronta il problema da una diversa angolazione, si ottiene una risposta inaspettata ma evidente; quale differenza se la confrontiamo con la dimostrazione numerica, e con la delusione delle dimostrazioni per induzione che spesso non fanno capire il perché del risultato! Di fronte a una soluzione geniale proviamo la stessa emozione di quando leggiamo di Beatrice che "dà per gli occhi una dolcezza al core, / che intender non la può chi no la prova", rispetto a una qualsiasi altra descrizione dell'amore.

Ma non voglio fare propaganda alla mia tesi, né lanciare una nuova filosofia; l'accostamento tra matematica e opere d'arte, letterarie o musicali, in fondo non è peregrino, anche se penso che possa essere spinto più avanti e che possa essere qualcosa di più di una superficiale analogia. Ritengo tuttavia che un compito paragonabile a quello della critica letteraria potrebbe essere svolto dalla filosofia della matematica, ispirandosi alla prima (per fare un esempio, la messa in luce dell'uso dell'iperbaton da parte di Leopardi): far capire dove si nasconde, come si esprime l'arte che la costruisce, nei suoi risultati meglio riusciti. Talvolta basta raccontare ed analizzare certe dimostrazioni, alcune di quelle epocali di Dedekind o di Zermelo per esempio, ma anche quella di Andrew Wiles: lì è la vera matematica, ed è tenuta nascosta, inaccessibile al pubblico.

Quali sono attualmente gli autori più importanti in filosofia della matematica? Alcune figure che negli anni passati hanno catalizzato l'attenzione sulle loro opere sono ancora attive, mentre alcuni filosofi sono passati ad altri interessi, come per esempio H. Putnam o Ph. Kitcher. Tra i primi si possono ricordare J. P. Burgess e G. Rosen nominalisti; H.H. Field, nominalista e sostenitore del realismo modale; C. S. Chihara sull'esistenza matematica; M. D. Resnik su Frege e sulla teoria dei *pattern*; S. Shapiro su strutturalismo e sulla logica del secondo ordine; P. Maddy su realismo e naturalismo; M. Steiner sull'applicabilità della matematica (oltre a essere uno studioso, tra i tanti, di Wittgenstein). Tra gli autori di formazione logica, Ch. Parsons, S. Feferman, W. Tait hanno recentemente raccolto la loro ricca produzione in volumi organici che diventeranno dei classici. Nomi nuovi emergenti sono M. Detlefsen (sui problemi connessi alla dimostrazione), D. Corfield (filosofia della "vera" matematica), E. R. Grosholz (sull'ambiguità), C. Pincock (sulla matematica applicata).

Bisogna tuttavia tenere presente che i filosofi della matematica più influenti sono i matematici stessi, o almeno quelli di essi capaci di una riflessione sul nuovo; è stato così un secolo fa, lo è ancora, in misura minore solo perché i problemi sono meno drammatici. La problematica ontologica e quella della ricerca di nuovi principi si trova soprattutto nei cultori di teoria degli insiemi (notizie dalla capitale arrivano al mondo filosofico attraverso meritori lavori come quelli di Penelope Maddy o di Tania Arrigoni); per la matematica sperimentale è meglio rivolgersi a J. M. Borwein che non a Hilary Putnam; per le applicazioni della matematica a Ed Witten o a Yuri Manin.

Può consigliare una lettura che possa introdurre al dibattito attuale in filosofia della matematica? Se si vuole avere un panorama delle posizioni che verso la fine del ventesimo secolo hanno rotto la situazione allora stagnante, si può consultare l'antologia curata da Thomas Tymoczko, *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1998, con scritti di Lakatos, Putnam, Hersh, Davis, Wang, Grabiner e altri; vi si trovano i vari filoni delle filosofie cosiddette umanistiche. Per quel che riguarda la filosofia della pratica matematica, che come abbiamo detto è la posizione più attuale, si può vedere Paolo Mancosu (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford, 2008.

Ma una sola lettura non è sufficiente, perché il panorama è molto variegato; non so se questo sia un segno di vitalità o di debolezza; due titoli introduttivi sono S. Shapiro, *Thinking about Mathematics*, Oxford Univ. Press, 2000 e G. Lolli, *Filosofia della matematica*, il Mulino, 2002; non essendo possibile una rassegna completa mi limito a indicare tre titoli, uno per il naturalismo, sopra citato, di Penelope Maddy, *Naturalism in Mathematics*, Oxford Univ. Press, 1997; uno sulla fenomenologia, di Richard Tieszen, *Phenomenology, Logic and the Philosophy of Mathematics*, Cambridge Univ. Press, 2005; e uno sul problema dell'applicabilità della matematica, di Mark Steiner, *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*, Harvard Univ. Press, 1998. Per altre indicazioni rinvio alla bibliografia relativa nel sito dell'Aila: http://www.ailalogica.it/didattica/bibliografie.php.

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 http://www.rifanalitica.it
Sponsored by *Società Italiana di Filosofia Analitica*

THE UNREASONABLE EFFECTIVENESS. THE PHILOSOPHICAL PROBLEM OF THE APPLICABILITY OF MATHEMATICS

Michele Ginammi

ABSTRACT. In this article I will sketch a general introduction to the problem of the applicability of mathematics as it is conceived in contemporary philosophy of mathematics. After some brief considerations concerning the historical reason why this problem was dismissed by the philosophical analysis during the first half of 20th century, I will expound Wigner's puzzle, and I will make some theoretical considerations about it. In particular, I will show that the problem of applicability is independent from the ontological framework we can eventually assume and that it depends rather on the existence of an epistemological gap between mathematics and physics. Finally, I will try to sketch a possible line of inquiry for understanding the applicability of mathematics in physics.

KEYWORDS. Applicability of Mathematics, Wigner's Puzzle, Ontology.

AUTHOR. Michele Ginammi. michele.ginammi@sns.it
RECEIVED. 18th September 2011 **ACCEPTED**. 1st October 2011

1 Applicability: a neglected problem

The problem of the applicability of mathematics has always been considered a central topic within the framework of philosophical reflection. From Plato to Frege, moving through Berkeley, Descartes, Kant, and many others, philosophy has always been interested in the reasons why it is possible to employ abstract concepts (such as mathematical ones) in order to count, to forecast empirical phenomena and, more generally, to explain reality.

However, it seems that contemporary philosophy (especially during the second postwar period) has forgotten the problem. This omission is exemplified by the fact that one of the most important 20th century anthology in philosophy of mathematics, Putnam and Benacerraf's Philosophy of Mathematics, includes no article concerning mathematical application or applicability. This is just what Mark Steiner reproached Benacerraf for: when he asked why they don't give this topic space in their anthology, Benacerraf answered that the lack of material was the reason.[1] Thus, we can agree with Steiner when he notes that «the disregard by the philosophical community of issues of mathematical application is quite recent».[2]

Wilholt (2006) tries to give an answer on why and how this problem has been progressively dismissed by philosophical analysis. He finds a cause for it in the history of logical positivism. He examines the idea of the early logicians who held that the analyticity of mathematics could account for its applicability. This idea has been transformed during Carnap's efforts to establish a consistent philosophy of mathematics within the framework of Logical Empiricism.

In Frege's conception, the analyticity of mathematics was conceived as adequate to explain mathematical applicability. According to his reductive logicism, mathematics could be reduced to logical concepts and this logical concepts could be applied to things in the world. The applicability of mathematics was so reduced to the applicability of logical concepts – something that after all we could even assume as a brute fact. But fregean reductive logicism could not be maintained for long, as is well known.

In Carnap's view, mathematical truths are analytically true in virtue of our adoption of a form of language, and the question why this language is applicable has not a theoretical but a pragmatic answer. Namely, nothing that could be demanded to philosophical analysis. But analyticity by itself does not grant an explanation of why mathematics is applicable: it needs to go logical reduction. So, Carnap's logicism saves analyticity of mathematical truth but loses applicability as one of the problems among the ones assigned to philosophical research.

Wilholt's analysis shows a possible cause for the neglect of applicability problem from the side of philosophy of science, but doesn't say much about this neglect from the side of philosophy of mathematics. On this side, probably, we can find a cause for it in the almost exclusive foundational interest that dominated the philosophy of mathematics during all the first half of the 20th century. This foundational interest shifted the philosopher's focus mainly on the internal relationships of mathematics, thus neglecting the external relationship between mathematics and other disciplines. As a result, the problem of applicability became just a test bed for the resilience of a foundational account. So, for example, logicist account of mathematics is better than formalist one because the former manages to account for applicability of mathematics in a way that the latter doesn't. As Russell points out:

> [W]e want our numbers to be such as can be used for counting common objects, and this requires that our numbers should have a definite meaning, not merely

[1] See (Steiner 1998, p. 14n).
[2] (Steiner 2005, p. 625).

> that they should have certain formal properties. This definite meaning is defined by the logical theory of arithmetic.[3]

Anyway, however this neglection could be accounted for, this oblivion lasted at least until 1960, when the physicist Eugene P. Wigner published an article titled "The unreasonable effectiveness of mathematics in natural sciences". In this article, Wigner underlines the existence of a problem that nevertheless, as the article's title suggests, seems to be unsolvable. The suggestive way in which he closed his article has became very famous in the literature on this topic:

> The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better of for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning.[4]

That goes without saying, this conclusion left many unsatisfied. Since the most part of the current philosophical reflection about the applicability of mathematics takes Wigner's article as its starting point and arises generally as a reaction to it, it is a good idea to take a deeper view into it.

2 Wigner's miracle

There are two points emphisized by Wigner:

> The first point is that mathematical concepts turn up in entirely unexpected connections. Moreover, they often permit an unexpectedly and accurate description of the phenomena in these connections. Secondly, just because of this circumstance, and because we do not understand the reasons of their usefulness, we cannot know whether a theory formulated in terms of mathematical concepts is uniquely appropriate.[5]

But what does he mean by "mathematical concepts"? His answer is very simple: «mathematics is the science of skillful operations with concepts and rules invented just for this purpose. The principal emphasis is on the invention of concepts».[6] Mathematical concepts, according to him, are *invented*. His claim is better clarified by his next words:

> Most more advanced mathematical concepts, such as complex numbers, algebras, linear operators, Borel sets (and this list could be continued almost indefinitely) were so devised that they are apt subject on which the mathematician can demonstrate his ingenuity and sense of formal beauty. [...]. The principal point [...] is that the mathematician could formulate only a handful of interesting theorems without defining concepts beyond those contained in the axioms and that the concepts outside those contained in the axioms are defined with a view of permitting ingenious logical operations which appeal to our aesthetic sense both as operations and also in their results of great generality and simplicity.[7]

[3](Russell 1993, p. 10).
[4](Wigner 1960, p. 14).
[5](Wigner 1960, p. 2).
[6](Wigner 1960, p. 2).
[7](Wigner 1960, p. 3).

According to Wigner, the main characteristic of mathematics consists in its "being of some interest". Part of the concepts are comprised among (defined by) the axioms and part are instead invented by the mathematician only in order to satisfy her "sense of formal beauty". So aesthetics comes out to be the main, metatheorical leading criterion that mathematicians follow.

Of course, to use the word "aesthetics" in this context does not helps very much. Actually, we would know which these aesthetical criteria are and what is their role in invention. Anyway, Wigner doesn't give any satisfactory answer to these questions.

Having this conception of mathematics in mind, he passes to analyze the role of mathematics in physical theories. He points out two different roles:[8]

1. evaluating the consequences of already established and already mathematically formulated theories; and

2. contributing to the (mathematical) formulation of physical theories.

The first role is the role generally assumed by applied mathematics, where mathematics merely serves as a tool – probably no more than a calculus. That's what happens when, for example, we want to know the exact position of a star in the sky at a certain time t: by means of the appropriate astronomical theory, we make the relative computations and we find the wanted result. In this case, we already have a mathematically formulated theory and we use mathematics just in order to evaluate the consequences of this theory.

The second role is the most intriguing. It consists in the fact that physicists choose certain mathematical concepts for the formulation of the laws of nature. This is something that comes out with strong evidence even at a first glance to the physicist's practice. But the very question is: Why does the physicist use these mathematical concepts to formulate the laws of nature?

> A possible explanation – Wigner answers – [...] is that he is a somewhat irresponsible person. As a result, when he finds a connection between two quantities which resembles a connection well-known from mathematics, he will jump at the conclusion that the connection is that discussed in mathematics simply because he does not know of any other similar connection. [...]. However, it is important to point out that the mathematical formulation of the physicist's often crude experience leads in an uncanny number of cases to an amazingly accurate description of a large class of phenomena. This shows that the mathematical langauge has more to commend it than being the only language which we can speak; it shows that it is, in a very reak sense, the correct language.[9]

The three examples he gives for substantiating his words are: (A) the use of second derivatives in Newton's law of gravitation, (B) the use of matrices in elementary quantum mechanics, and (C) the quantum theory of the Lamb shift. These examples show with great incisiveness the «appropriateness and accuracy of the mathematical formulation of the laws of nature in terms of concept chosen for their manipulability, the "laws of nature" being of almost fantastic accuracy but of strictly limited scope».[10] At this point, he proposes to refer to this fact as to the "empirical law of epistemology". This law, together with the laws of invariance of physical theories, is an indispensable foundation of these theories. Thus, according

[8] See (Wigner 1960, p. 6).
[9] (Wigner 1960, p. 8).
[10] (Wigner 1960, p. 10).

to Wigner's account, the astonishing ability of mathematical concepts in describing reality, and the amazing high degree to which it does that, is something that we should accept as an empirical fact – and that's all! Actually, the above quoted Wigner's conclusion is just a pompous phrasing for that.

For easing our discussion, we can sum up Wigner's argument as follows:

(A) Mathematicians *invent* their mathematical theories in order to satisfy their own *aesthetical* criteria $x_1, \ldots, x_n$.

(B) Phisicists elaborate their physical theories in order to satisfy their own criteria $y_1, \ldots, y_m$.

(C) Criteria $x_1, \ldots, x_n$ are different from criteria $y_1, \ldots, y_m$.

(D) It is unreasonable that something elaborated on the basis of $x_1, \ldots, x_n$ can satisfy *in such an effective and precise manner* the critieria $y_1, \ldots, y_m$.

(E) Conclusion: the employment of mathematical concepts in phisics is unreasonable.

So, we can focus now on the single premises (A)-(D), and try to understand whether they should be accepted or not.[11] Wigner doesn't give many convincing arguments for us to accpet his premises, and his analysis is surely unsatisfactory, especially from the philosophical point of view. However, to throw it away without considering his words worthy of a deeper philosophical analysis would be undoubtedly hasty.

3 Applicability problem and ontological considerations

The first point of Wigner's account concerns, as we saw, the fact that mathematical concepts are invented by mathematicians according to aesthetical criteria. The claim is indeed double: he is saying firstly that mathematical concepts are *invented*, and secondly that what guides mathematicians in this invention is beauty. Both these claims deserve our attention.

To say that mathematical concepts are invented could be seen as an adherence to an anti-realistic view on mathematics: mathematical concepts does not have an ontological reference in (what realists call) mathematical entities, since they are just an invention of human intellect. Actually, if we interpret Wigner's claim in this stronger, ontological sense, one could reply by saying that the problem of applicability is therefore a problem for anti-realists only. Thus, a realist philosopher would not have such a problem, since according to her mathematical concepts are not invented but has a precise (although abstract) reference in reality.

We can surely take Wigner's claim in this stronger sense, but I think it is not what Wigner had in mind. I think that what he means by "invention" is just that we select a class of mathematical properties or manipulation rules without any consideration of their physical interpretation. It is an invention, in the sense in which this word is opposed to "discovery", because it is the result of an act of free composition; but notwithstanding it is completely detached from the ontological level, since we are not caring about that. Let's take the case of complex numbers: they was "invented" simply by allowing for the solution of the operation $\sqrt{-1}$ and giving new definitions for the operations with the new numbers thus obtained. The sense of "invention" in mathematics is as the same as in painting: we invent a mathematical concept as well as we "invent" a picture. In both the cases, we are simply speaking on a level

[11] Obviously, I will omit to discuss premise (C), since it is just what we should explain if we don't accept Wigner's conclusion.

different from the ontological one. In a similar vein, Steiner (1998) says that mathematician is «closer to the artist than to the explorer» (p. 47). The emphasis is on the epistemological difference between the mathematician-artist and the physicist-explorer. Their epistemological strategies are different and that is what motivate the wonder for mathematical applicability.

However, the stronger, ontological interpretation raises a question: is it really true that the problem of applicability of mathematics is a problem for anti-realists only? Is it really true that for realists everything goes well with the applications of mathematical concepts? If it were so, then we could take the fact that realism weeds the applicability problem out as an evidence for accepting realism in mathematics. Actually, there are philosophers who assert this claim, for example Davies (1992, pp. 140-60) and Penrose (1990, pp. 556-7).

In this connection, Colyvan (2001*b*) tryes to face this opinion by showing that the applicability of mathematics is a problem for realist as well as for anti-realist philosophers. His argument moves from the presupposition that mathematics is useful not only in *describing* empirical reality, but also in *discovering* empirical laws.[12] Colyvan takes into consideration two important philosophies of mathematics, the first (realist) due to Quine (1948) and Putnam (1979), and the second (anti-realist) due to Field (1980). «Both of these philosophical positions – Colyvan says – are motivated by, and pay careful attention to, the role mathematics plays in physical theories. It is rather telling, then, that each suffers similar problems accounting for Wigner's puzzle».[13]

The first account (Quine & Putnam) starts from the general ontological principle according to which we are ontologically committed to all that we cannot dispense with. In more precise terms: if talk of some entity ξ is indispensable to a theory T, and T is our best scientific theory of some phenomena, then we are committed to the existence of ξ.[14] Since, according to Quine & Putnam, mathematical entities are indispensable in this precise sense, their conclusion is that we are committed in mathematical entities.[15]

The argument is evidently shaped in parallel with the analogous argument for scientific realism:

> It's no miracle, claim scientific realists, that electron theory is remarkably effective in describing all sorts of physical phenomena such as lightning, electromagnetism, the generation of X-rays in Roentgen tubes and so on. Why is it no miracle? Beacuse electrons exist and are at least partially causally responsible for the phenomena in question. Furthemore, it's no surprise that electron theory is able to play an active role in novel discoveries such as superconductors. Again this is explained by the existence of electrons and their causal powers. There is, however, a puzzle here for the anti-realist.[16]

In the case of scientific realism, there is indeed a pressure on anti-realists, since they seem not to be able to explain the efficacy of the electron theory in describing reality. But the argument can hardly be exported in the field of mathematical realism. The reason, according to Colyvan, is that

> There is an important disanalogy [...] between the case of electrons and the case of sets. Electrons have causal powers – they can bring about changes in the world.

[12] Also Steiner 1989, 1998 moves this point – a point that Wigner seems not to take into consideration.
[13] (Colyvan 2001*b*, p. 269).
[14] See (Colyvan 2001*b*, p. 270).
[15] The reader interested in a deeper survey on indispensability argument can refer to Colyvan (2001*a*).
[16] (Colyvan 2001*b*, pp. 270-1). As an example of such an argument for scientific realism, see Smart (1963).

> Mathematical entities such as sets are usually taken to be causally idle – they are platonic in the sense that they do not exist in space-time nor do they have causal powers. So how is that the positing of such platonic entities reduces mystery?[17]

So, it seems that the realist philosopher has two alternatives: (1) to say that mathematical entities are causally active; or (2) to accept that for her, as well as for the anti-realist, the applicability of mathematics causes a problem. Cheyne & Pigden (1996) have argued, against Platonism, that Quine's account is indeed compelled to (1). Someone else has tried to challenge the common sense according to which mathematical entities are causally inactive, by just substantivating alternative (1), but this road seems to be pretty much marginal within the contemporary debate.[18]

On the other side, Colyvan takes into consideration Field's nominalistic proposal. It can be summed up in the following three moves:

(1) *Fictionalism*, according to which all the mathematical sentences are literally false, but true in the fiction of the mathematical practice. This fictionalism is intended to remove the commitment to mathematical entities implied by our quantifications within mathematical statements.

(2) Enunciation of the so called *Principle of Conservativeness*, according to which if a mathematical theory is added to a nominalist set of propositions N (e.g., a scientific theory) no nominalistic consequences follow that wouldn't follow from N alone. This principle is intended to account for the possibility to use mathematical theories in science: we can do it beacuse this application is conservative. Move (2) also originates the Field's nominalistic project expounded at the next point.

(3) Nominalization of all our best physical theories. The complete realization of this last point assures that mathematics is indeed *dispensable*, contrary to Quinean belief. Field, for his part, gives a nominalization of a consistent fragment of Newtonian gravitational theory.

Field's project has undoubtedly many merits, but also many complaints,[19] including the fact that, as Colyvan underlines,

> [...] despite Field's careful attention to the applications of mathematics, he leaves himself open to Wigner's puzzle. [...] What he fails to provide is an account of why mathematics leads to simpler calculations. Moreover, Field gives us no reason to expect that mathematics will play an active role in the prediction of novel phenomena.[20]

Field's Principle of Conservativeness gives us good reasons to understand why mathematics *can* be used in physics, but he does not give us reasons to understand why mathematics is indeed used in physics. Since the application of mathematics is conservative (in the above

[17](Colyvan 2001*b*, p. 271).

[18]See, for example, Maddy (1990). However, in her next works (See (Maddy 1997, 2007)) she seems to have abandoned such a view on mathematical entities.

[19]One of its merits consists in giving a possible solution to the so called "Benacerraf's dilemma" (See (Benacerraf 1973)). The complaints concern both the effective possibility to expand the nominalization to certain branch of the physics (See (Malament 1982)) and whether all the concrete entities that he accepts are nominalistically acceptable (See (Resnik 1983, 1985)).

[20](Colyvan 2001*b*, p. 272-3).

sense), we can use it *if we have some good reasons to do it*. But which are these good reasons? That's what Field omits to say.

So, we can conclude, both realist and anti-realist have to face the same problem raised by Wigner. One could objects that Colyvan focused only on two particular realist and anti-realist philosphies of mathematics, and that other realist accounts of mathematics could "explain away" the problem of applicability. I think that this objection has no ground, for a very simple reason: any *ontological* choice we make about mathematical objects cannot fill the *epistemological* gap between physics and mathematics. By epistemological gap I mean the fact that mathematics and physics are devised wtihin two different epistemological framework. Physics, just to state the obvious, is much more empirical than mathematics and the comparision with empirical world has a bigger importance in physics rather than in mathematics. Mathematicians have a freedom in creating their own concepts that physicists don't have, and the way in which the former arrive to the knowledge of mathematical "facts" is very different from the way in which the latter arrive to the knowldge of physical phenomena. So, if we admit that in both the cases (in physics and in mathematics) we gain knowledge, we must also admit that the difference concerns first of all the way in which this knoledge is gained by us, and only secondarily the "what" that we are trying to knowledge. I think that this is just the way in which we should interpret Wigner when in premise (A) he speaks of mathematical "invention" of concepts: just in an epistemological – and not ontological – anthitesis with physical discovery. In other words, mathematical knowledge and physical knowledge are epistemologically different, and this epistemological difference cannot be accounted by ontological decisions.

4 Beauty and anthropocentrism

This gap between mathematics and physics is particularly marked in Wigner's formulation, because of the high importance he attaches to aesthetical criteria in the development of mathematics.[21] According to him, as we saw, mathematical concepts arise from the aesthetic impulse in humans. In order to better understand this claim, we would like to know what he means by "aesthetical criteria", but he is quite reticent about that. The only clarification he gives is when he esplicitly denies that simplicity is one of these aesthetical criteria. One could note that only a small number of mathematical concepts are used by physicists in formulating their laws of nature and that sometimes physicists do not *chose* these mathematical concepts, but they develop them independently and then recongnize them as having been conceived before by mathematicians.

> It is not true, however, as is so often stated, that this had to happen because mathematics uses the simplest possible concepts and these were bound to occur in any formalism. As we saw before, the concepts of mathematics are not chosen for their conceptual simplicity (even sequences of pairs of numbers are far from being the simplest concepts) but for their amenability to clever manipulations and to striking, brilliant arguments.[22]

However, we could reply that this argument is not forcefull at all. Indeed, even if simplicity is not among the aesthetical criteria adopted by mathematicians, it could be that the

[21]There is a wide shared opinion among working mathematicians about the tight connection between mathematics and beauty. See, for example, Rota (1977) and Hardy (1992).

[22](Wigner 1960, p. 7).

resulting mathematical theories are indeed the simplest tool for pursuing a certain aim. For example, it could be that, after all, some mathematical structure are the simplest way to represent a certain physical system – even if that structure was not developed by mathematicians for its simplicity but for its aesthetical properties. The crucial point is that the fact that a theory has been selected on the basis of aesthetical criteria does not exclude that that theory could have some other interesting properties, and that those properties could make the theory desirable by the physicists for their own purposes. We could also admit that matrix theory were developed for aesthetical purposes, but the resulting theory is not only beauty: it has also other interesting properties that prompted physicists to use that for representing and manipulating – as an instance – the rotation of a body in the space. Besides, there are branches of mathematics that were developed under the push of physical questions. That's the case of the analysis, developed by Newton and Leibniz during XVII century mainly to give an answer to concrete applied problems. We can also think that also in this case mathematicians selected the prettier theory among a number of possible theories, but the fact remains that all the possible theory among which they selected the prettier must be, as a necessary requisite, apt to solve the applied problem for which they were devised. So, if we conceive aesthetical criteria as only acting a selection within mathematics (as Wigner seems to do), there is no reason to think that there could not be another more foundamental criterion acting on the formulation of mathematical concepts such that it could explain why mathematics is so effective in physics, so bridging the epistemological gap aforementioned.

A stronger version of Wigner's puzzle is given in Steiner (1998), where is also given a different puzzle valid not only for descriptive applicability but also for the nondeductive role of mathematics in discoverying the laws of nature. Especially, Steiner stresses the *costitutive character* of the aesthetical criteria in mathematics: by providing several quotations from renowed mathematicians as von Neumann and Hardy, he arrives even to conclude: «That the aesthetic factor in mathematics is *constitutive* has actually become a truism in the mathematical community».[23] Such aesthetical criteria are *species-specific*,[24] so that mathematics turns out to be – according to Steiner – an eminently *anthropological* production, to which we cannot attach any character of objectivity. Moreover, by appealing on this anthropocentric character and by showing the wide employment of pythagorean and formalists analogies in the discovery of new theories by the 20th century physicists, Steiner arise a critic to naturalism's pretension to properly account for the process of scietific inquiry. A "Pythagorean" analogy is a mathematical analogy between physical laws not paraphrasable at time t into nonmathematical language. A "formalist" analogy is an analogy based on the syntax or even orthography of the language or notation of physical theories, rather than what it expresses [25] As an example of the former, Steiner instances Maxwell's prediction of electromagnetic radiation and Schroedinger's discovery of wave mechanics. As an example of the latter, he instances the extension of the quantum mechanical formalism to configuration spaces with "deviant" topologies and the strategy of "quantization" of quantum systems.[26]

[23](Steiner 1998, p. 65). Italics mine.

[24]See (Steiner 1998, p. 6). By the way, it is interesting to note that the strong stress he puts on costitutive role of beauty in mathematics also gives him a reason to refuse structuralist philosophies of mathematics: for there is no objective criterion for a structure to be mathematics, and not every structure counts as mathematics. Chess, for example, has structure, but it does not count as mathematics since it – according to Steiner – does not embody mathematical beauty (See (Steiner 1998, p. 7 and p. 66).

[25]See (Steiner 1998, p. 54).

[26]See (Steiner 1998, chapters 4-6).

I agree with Pincock (forthcoming) when he objects to Steiner that we have to keep the question "What makes this concept mathematical or nonmathematical?" separate from the question "What makes this concept a good or a bad mathematical concept?" and that Steiner's arguments in answering the former can answer at the most the latter.[27] So, we can accept that beauty has a *selective* role in mathematics, since it selects beautiful theorems or theories and promote the development of this or that branch; but that it has also a *costitutive* role is not certain at all.

Now, the anthropocentric character of mathematics claimed by Steiner is a direct consequence of the constitutive role played by beauty in mathematics. But if we deny this constitutive role of beauty in mathematics, we can still say that beauty has a selective role in mathematics without being compelled to say that mathematics is anthropocentric. For if beauty is not a *constitutive* criterion for accepting a mathematical concept (or theory), then there could be another constitutive criterion – and this constitutive criterion might also be non-anthropocentric and leave open the possibility of a link between mathematics and physics.

This line of inquiry is instantiated, for example, by structuralist philosophers of mathematics, according to which the constitutive criterion for X to be mathematics is that X is a structure. Thus, structuralists can solve the Wigner's puzzle by saying that mathematics is the general science of structures, and that these structures are just those displayed in nature and studied by physicists.[28]

Actually, also Steiner thinks that the Wigner's puzzle about the descriptive applicability of mathematics can be *partially* solved by giving up the pretension of solving the problem in general and by focusing on the effectiveness of single mathematical concepts. For each of these concepts, we can try to detect a physical concept (or property) matching it. As an example, Steiner mentions the concept of fiber boundle and its employment in gauge field theory, where «the remarkable applicability of fiber boundle theory to physics rests on the translatability of the concepts of fiber boundle theory into the concepts of gauge field theory».[29] However, this strategy cannot be generalized, since there are cases in which we are not able (at least at the moment) to found a complete matching between mathematical and physical concepts.[30]

Moreover, Steiner's remarks about the employment of Pythagorean and formalist analogies in discovering new laws of nature extend the extent of Wigner's puzzle, so that Steiner's puzzle is wider and deeper than Wigner's one. Even if we accept structuralist solution to the descriptive applicability problem, we still have a problem, according to Steiner, concerning his puzzle about the heuristic role of some purely mathematical analogies in contemporary physics.

5 Application and mathematization

In order to make this puzzle a bit less obscure, we can note what follows. There is an important aspect, concerning the applicability of mathematics, that we have still to take into consideration. Premise (B) in Wigner's argument underlines the fact that physicists and

[27] See (Pincock forthcoming, chapter 8) for a more detailed analysis of Steiner (1998).

[28] For more details on structuralism and its account of applicability, see Shapiro (1983) and Shapiro (1997). See also Bueno & French (1999) and French (2000) for an interesting case study.

[29] So that, as an instance, the global gauge corresponds to the principal coordinate boundle, the gauge type to the principal fiber boundle, the gauge potential b_μ^k to the conncection on a principal fiber boundle, and so on. See (Steiner 1998, pp. 32-4).

[30] Steiner mentions the case of the application of complex analysis in physics.

mathematicians have different criteria in mind when they work with mathematical concepts. Premise (D) says that what is unreasonable is that this difference could be in some sense fruitful. Both these premisses focuses on the criteria adopted by physicists and mathematicians in order to develop, employ and apply mathematical concepts. But there is another aspect that we should take into consideration, that is to say, the amount of work that physicist has to do in order to make a physical concept *compatible* with the mathematical apparatus that she is going to apply.

There is a general tendency for philosophers to speak of the "use" or "the employment" of mathematical concepts by physicists. The resulting picture seems to be the following: mathematicians devise their mathematical concepts for their own purposes and following their own methods; then the physicists select some of these concepts and simply "employ" them in their theories. It seems as if it were mathematics that does all the work. Sometimes, as Wigner said, physicists elaborate mathematical concepts and then discover that those concepts were already devised by mathematicians; but also in these cases, the mathematical concepts were already available. But what exactly means that physicists employ mathematical concepts in their theories? What we have not still considered is that this employment is not simple at all, but requires a number of "adaptation moves" that are sometimes very complex.

Let me take a very trivial example. When Kepler, speaking with the vulgar, "applied" the conic theory (developed eighteen centuries before by Apollonius of Perga) to the planets' movement, he had to previously idealize the planets themselves, making them nothing more than mathematical points in a bidimensional space. Namely, he had to abstract from their corporeal nature.

A more complex example can be found in the application of group theory to particle physics.[31] In ordere to make it possible, physicists had to make a number of theoretical moves. A preliminar move was Heisenberg and Dirac's work on the quantum indistinguishable particles, that showed an interesting symmetry characteristic, that is, that quantum states are invariant under permutation. This permutational symmetry is an abstraction from particles' identity and is what permitted the application of symmetric group. Then, by ignoring inter-electronic interactions, they could describe rotational symmetry by means of the proper group representation. And again, by ignoring the differences between the masses of protons and neutrons and abstracting from their charge, physicists conceived the atomic nucleus as consisting of a single kind of particle (the nucleon). By means of this last move, physicist introduced (by analogy with the situation in the atom) the notion of isospin.[32]

What we must note is that what permitted to arrive at this mathematical description is a list of idealisations that disclosed the underlying symmetry principles. As French notes,

> the physics is manipulated in order to *allow it to enter into a relationship with the appropriate mathematics*, where what is appropriate depends on the underlying analogy. At the most basic level, what motivates this manipulation and therefore underpins the effectiveness of mathematics in this case are the empirical results concerning intra-nuclear forces and the near equivalence of masses.[33]

In applying a mathematical theory to physics, we have often to import structure from the mathematical level to the physical one, and we can do that only by means of some theoretical

[31] See Bonolis (2004) for a detailed historical reconstruction.

[32] The analogy is here Pythagorean, according to Steiner's definition, since the analogy has no physical justification, being completely mathematical. As Steiner (1998) points out: «even today, physicists see no *physical* analogy between the quantities "spin" and "isospin"» (p. 90).

[33] (French 2000, p. 114). Italics mine.

moves. In very general terms, we could say that the aim of these moves consists in gaining a more abstract level. This abstraction can be obtained by means of idealization, or generalization, or approximation, or carelessness of some details, or definitions, or by means of more of these strategies together. A very interesting case is that of definition. Let consider the following quotation from a textbook on knot theory:

> Almost everyone is familiar with the simplest of the common knots, e.g., the overhand knot [...] and the figure-eight knot. [...]. A little experimenting with a piece of rope will convince anyone that these two knots are different: one cannot be transformed into the other without [...] "tying" or "untying". Nevertheless, failure to change the figure-eight into the overhand by hours of patient twisting is no proof that it can't be done. The problem that we shall consider is the problem of showing mathematically that these two knots [...] are distinct from one another.
>
> *Mathematics never prove anything about anything except mathematics*, and a piece of rope is a physical object and not a mathematical one. So before worrying about proofs, we must have a *mathematical definition of what a knot is*. [...]. This problem [...] arises whenever one applies mathematics to physical object that approximate the physical object under consideration as closely as possible.[34]

What this quotation shows is that the application of mathematics to physics is less a dipping mathematics into physics than a raising physics to the abstract level of mathematics. It is just by focusing on this abstract character of mathematics that maybe we can – I guess – find a way out from Steiner's puzzle.

We can reformulate the premise (B) in a more suitable way:

(B') In order to apply mathematics in physics, physicist has to shape their concepts on the model of mathematical ones.

So formulated, (B′) defuses the premise (D), since it is no more a question of differing criteria. Whatever the mathematical criteria $x_1, \dots, x_n$ be, there is something in the resulting outcome that interests physicists. Thus, the question is not "Why does anything elaborated on the basis of $x_1, \dots, x_n$ can satisfy *in such an effective and precise manner* the different critieria $y_1, \dots, y_m$?", as suggested by premise (D); but rather: "Which characteristic(s), owned by mathematical concepts, is (are) so interesting in the eyes of the physicist? And why does the possession of such a characteristic by physical concepts make them so effective and fruitful in describing and discover the laws of nature?". We can also think, as Wigner and Steiner do, that the criteria determining the development of mathematics are completely different from the criteria determining the development of physics, but this does not mean that these criteria cannot produce a resulting characteristic that is of some interest for the physicist. A good candidate for this characteristic is probably *abstraction*, but it could be not the only. However, if the physical concepts must undergo a process of progressive abstraction in order to "accomodate" mathematical structure, then it is not a surprise that, in highly abstract contexts, there could be cases in which purely formal analogies give important heurisitc inupt.

Of course, there is still much to say about the reasons why abstraction (or whatsoever characteristic) is so effective in describing and discover the laws of nature. For example, how is it possible that abstract concepts could give so precise predictions of *concrete* phenomena? However, in conclusion, the reformulation of Wigner's puzzle we has come to, far from being less problematic, seems at least to suggest us a possible way out from the Steiner's puzzle and

[34](Crowell & Fox 1963, p. 3). Italics mine.

to bridge, in some sense, the epistemic gap that separate physics and mathematics. For the two epistemological frameworks in which mathematics and physics are developed, all things considered, could have a point of contact just in this (or these) characteristic(s).

6 Conclusion

The considerations stated up to now don't allow us to prove, once and for all, that Wigner is wrong in considering the applicability of mathematics as unreasonable. Maybe it's really true that mathematical effectiveness is «a wonderful gift which we neither understand not deserve». Maybe it is really unreasonable and we'll never understand it. However, I hope that the previous analyses have at least scratched the aura of mistery coming from Wigner's formulation, suggesting that, difficult as it could be, philosophers should not give up the challenge. After all, we should never forget the words of Peirce:

> The second bar which philosophers often set up across the roadway of inquiry lies in maintaining that this, that, and the other never can be known. [...]. But to avert that that answer will not be known tomorrow is somewhat risky; for oftentimes it is precisely the least expected truth which is turned up under the ploughshare of research».[35]

[35](Peirce 1931, I.138).

References

Benacerraf, P. (1973), 'Mathematical truth', *Journal of Philosophy* 70, 661–80. Now in Benacerraf & Putnam (1983). 35

Benacerraf, P. & Putnam, H., eds (1983), *Philosophy of Mathematics*, 2nd edn, Cambridge University Press, Cambridge (Mass.). 42

Bonolis, L. (2004), 'From the rise of the group concept to the stormy onset of group theory in the new quantum mechanics. A saga of the invariant characterization of physical objects, events and theories', *Rivista del Nuovo Cimento* 27(4-5). 39

Bueno, O. & French, S. (1999), 'Infestation or pest control: the introduction of group theory into quantum mechanics', *Manuscrito* XXII(2), 37–68. 38

Cheyne, C. & Pigden, C. R. (1996), 'Pythagorean powers or a challenge to platonism', *Australasian Journal of Philosophy* 74(4), 639–645. 35

Colyvan, M. (2001*a*), *The Indispensability of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford. 34

Colyvan, M. (2001*b*), 'The miracle of applied mathematics', *Synthese* 127, 265–277. 34, 35

Crowell, R. H. & Fox, R. H. (1963), *Introduction to Knot Theory*, Ginn and Co., Boston. 40

Davies, P. C. W. (1992), *The Mind of God*, Penguin Book, London. Trad. it. *La mente di Dio*, Mondadori, Milano 1996. 34

Field, H. (1980), *Science Without Numbers*, Princeton University Press, Princeton. 34

French, S. (2000), 'The reasonable effectiveness of mathematics: partial structures and the application of group theory to physics', *Synthese* 125, 103–120. 38, 39

Hardy, G. H. (1992), *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, Cambridge. First edition: 1940. 36

Maddy, P. (1990), *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford. 35

Maddy, P. (1997), *Naturalism in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford. 35

Maddy, P. (2007), *Second Philosophy*, Oxford University Press, Oxford. 35

Malament, D. (1982), 'Review of Field's *Science Without Numbers*', *Journal of Philosophy* 79, 523–534. 35

Peirce, C. S. (1931), *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Vol. 1, Harvard University Press, Cambridge (Mass.). 41

Penrose, R. (1990), *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds and the Laws of Physics*, Vintage, London. Trad. it. *La nuova mente dell'imperatore*, Rizzoli, Milano 1992. 34

Pincock, C. (forthcoming), *Mathematics and Scientific Representation*, Oxford University Press, Oxford. 38

Putnam, H. (1979), Philosophy of logic, *in* 'Mathematics Matter and Method: Philosophical Papers Vol. 1', 2nd edn, Cambridge University Press, Cambridge. 34

Quine, W. V. O. (1948), 'On what there is', *The Review of Metaphysics* 2(5). Reprinted in *From a Logical Point of View*, 2nd edition, Harvard University Press, Cambridge (Mass.) 1980. 34

Resnik, M. D. (1983), 'Review of Hartry Field's *Science Without Numbers*', *Noûs* 17, 514–519. 35

Resnik, M. D. (1985), 'How nominalist is Hartry Field's nominalism?', *Philosophical Studies* 47, 163–181. 35

Rota, G. C. (1977), 'The phenomenology of mathematical beauty', *Synthese* 111(2), 171–182. 36

Russell, B. (1993), *Introduction to Mathematical Philosophy*, reprint edn, Routledge, London and New York. Firs edition: 1919. 31

Shapiro, S. (1983), 'Mathematics and reality', *Philosophy of Science* 50, 523–548. 38

Shapiro, S. (1997), *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*, Oxford University Press, Oxford. 38

Smart, J. J. C. (1963), *Philosophy and Scientific Realism*, Routledge and Kegan Paul, New York. 34

Steiner, M. (1989), 'The application to mathematics to natural science', *Journal of Philosophy* 86, 449–480. 34

Steiner, M. (1998), *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*, Harvard University Press, Cambridge, Mass. 30, 34, 37, 38, 39

Steiner, M. (2005), Mathematics — application and applicability, *in* S. Shapiro, ed., 'The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic', Oxford University Press, Oxford, pp. 625–650. 30

Wigner, E. (1960), 'The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences', *Communications in Pure and Applied Mathematics* 13(1), 1–14. Reprinted in *Symmetries and Reflections*, Indiana University Press, Bloomington 1967. 31, 32, 36

Wilholt, T. (2006), 'Lost in the way from Frege to Carnap: How the philosophy of science forgot the applicability problem', *Grazer Philosophischen Studien* 73, 69–82. 30

Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 http://www.rifanalitica.it
Sponsored by *Società Italiana di Filosofia Analitica*

SOME PROPOSALS FOR THE SET-THEORETIC FOUNDATIONS OF CATEGORY THEORY

Lorenzo Malatesta

ABSTRACT. The problem of finding proper set-theoretic foundations for category theory has challenged mathematician since the very beginning. In this paper we give an analysis of some of the standard approaches that have been proposed in the past 70 years. By means of the central notions of class and universe we suggest a possible conceptual recasting of these proposals. We focus on the intended semantics for the (problematic) notion of large category in each proposed foundation. Following Feferman (2006) we give a comparison and evaluation of their expressive power.

KEYWORDS. Category Theory, Set Theory, Foundations.

AUTHOR. Lorenzo Malatesta. lorenzo.malatesta@gmail.com
RECEIVED. 6th September 2011 **ACCEPTED**. 3rd October 2011

1 A problem of size

> [...] Thus, category theory is not just another field whose set-theoretic foundation can be left as an exercise. An interaction between category theory and set theory arises because there is a real question: what is the appropiate set-theoretic foundation of category theory?
>
> Andreas Blass[1]

It is common to date the birth of category theory to the publication of Eilenberg and Mac Lane's paper,[2] *A general theory of natural equivalences*. Already in this pioneering work, we can find a first analysis of some foundational issues concerning the raising theory. In fact Eilenberg and Mac Lane dedicate an entire paragraph to discuss some foundational problems of the set-theoretical interpretation of their theory. Here is the beginning of this paragraph:[3]

> We remarked in §3 that such examples as the "category of all sets", the "category of all groups" are illegitimate. The difficulties and antinomies here involved are exactly those of ordinary intuitive Mengenlehre; no essentially new paradoxes are apparently involved. Any rigorous foundation capable of supporting the ordinary theory of classes would equally well support our theory. Hence we have chosen to adopt the intuitive standpoint, leaving the reader free whatever type of logical foundation (or absence thereof) he may prefer.

The two authors immediately recognise the peculiarity of the constructions involved in their theory and offer a first simple diagnosis: since there is nothing new under the sun, just old well-known paradoxes, it is sufficient to give back these issues to the field they belong, i.e. set theory. Despite the apparent haste to dismiss the matter, what follows the above mentioned paragraph can be seen as the first concrete attempt to solve the problem: after having discussed some technical issues, the two mathematicians suggest a possible development of category theory inside the framework of the theory of sets and classes in the style of von Neumann, Bernays and Gödel's set theory (NBG). Before entering into the details of this and other proposals, it is important to focus on what is the problem. A good starting point is given by a critical analysis of the role played by the notion of **size** in category theory. Indeed, with the exception of set theory, it is difficult to find other mathematical fields where the notion of size plays such a central role. On the other hand, in category theory the distinction between **small categories** and **large categories** represents an important and inescapable dichotomy raised at the very beginning of any reasonable introduction to the subject. Nevertheless it is usual to get rid of this question as soon as possible and the working mathematician who uses category theory is therefore reluctant to deepen the analysis of the foundations of the theory. The following dialogue[4] is intended to parody this situation:

Dialogue 1.

[2]S. Eilenberg (1945).
[3]S. Eilenberg (1945), p. 246.
[4]The characters of this invented dialogue have been inspired by the dialogues in Hofstadter (1979).

TORTOISE: Hi Achilles, how are you? You have disappeared for a while, what have you been up to?

ACHILLES: My dear little Tortoise, you won't believe it, but I started studying some *abstract nonsense*. And, let me say that I found in it much more sense than is usually said.

TORTOISE: Good Achilles, I see you are not losing the habit to challenge your mind. I also have tried to give meaning to that bunch of arrows some time ago... now, I can just remember the definition of a category. Let me take the opportunity to ask you something that has bothered me since that time. Can you tell me what people mean with the term *large category*?

ACHILLES: Oh, my sweet little Tortoise, I know what you are driving at... you want to cheat me with the old story of the barber undecided if he shaves himself or not... this time I won't fell for it. The matter is simple: a large category is one whose collection of morphisms is a *proper class*.

TORTOISE: Then, let me bother you with my usual reasoning. The natural question to pose now is: what do you mean by proper class?

ACHILLES: Well, I'll be polite and I won't escape your innocent inquisition. I will call a proper class a collection which is not a set.

TORTOISE: It's not exactly a definition, but I'll give you that. I believe you already know what I am going to ask next...

ACHILLES: Let's see. Usually you don't have so much imagination. The only new term I introduced in our dialogue is set. I hope you don't want to ask me what is a set...

TORTOISE: Exactly Achilles: less fantasy and more pedantry is the recipe of my philosophy...

ACHILLES: Ok. Let me surprise you. I have a new definition: a set is an object of the category Set, whose object are sets and whose morphisms are functions.

TORTOISE: Mmh..., you are right Achilles, you always surprise me... I am afraid you lost your way in an abstract nonsense...

Clearly positions like Achilles' one are unsatisfying from every possible point of view: mathematical, logical and philosophical. A proper category theorist, probably, would have preferred to answer Tortoise's question, "what is a set", saying "it's an object of a well-pointed topos with a natural number object and which satisfies the axiom of choice". Since this answer costs much more effort than trying to understand the problem, it is important to clarify what we mean by the problem of set-theoretic foundations of category theory, in such a way that also Achilles can understand why his position is not defensible.

It is an empirical fact that, to a great extent, mathematics can be formalized in set theory: a rather common choice for this set-theoretic "codification" is represented by the axioms of Zermelo Fraenkel's set theory with the axiom of choice (ZFC). For example, we can imagine to present group theory, algebraic topology or functional anaysis with the language only of set theory: objects of these theories can be described as sets whose properties can be derived from set-theoretic axioms. Following Blass,[5] it is therefore natural to ask in what sense category theory is an exception to this phenomenon. Why can't we leave this codification as a routine exercise?

As we have already observed, at the root of category theory lies the important *small / large distinction*. When doing category theory some of the objects and constructions that we deal with are (and have to be) essentially large. One of the first problem we meet if we regard this object from a set- theoretic perspective is to find an adequate encoding for large categories such as the category of all sets (*Set*) or the category of all groups (*Grp*). These categories are built having in mind essentially large collections and cannot be treated simply as sets.[6] This is not the only problem. The following list resumes some of the main issues that are essential to develop category theory.[7] In every reasonable foundational framework[8] we want to be able to:

(A) form the category of every structure of a given type. Some elementary examples are: *Set*, *Grp* and *Top*;

(B) perform some basic set-theoretic constructions over an arbitrary category;

(C) form the category of all the functors between two arbitrary categories.

If we are specifically interested in set-theoretic foundations for category theory we would also like to be able to

(D) decide the consistency of these systems with respect to some accepted system of set theory.

It is worth mentioning that, beyond the concept of "large category" (requirement A), there are several different notions that rely on the same concept (*locally small category*, *small limits*, etc.). The frameworks should be expressive enough to make sense of each of these.

As we will see the choice of a specific foundational system will affect substantially the fulfilment of these requirements.

The next section gives an overview of the foundational proposals that we will consider in the rest of the paper.

2 Set-theoretic and other proposals: a retrospective.

As already noted, debates about foundations of category theory started with the very introduction of the notion of category. The rapid development of the theory and the ubiquity of categorical notions in different mathematical fields have brought these foundational issues to the attention of several mathematicians.

In the sequel we will consider some standard set-theoretic approaches to the problem of foundations of category theory. It is important to keep in mind that set theory is just *one* possible approach. Even among the set-theoretic frameworks, we won't be able to cover exhaustively all those proposed in the past, for example, Feferman's proposal to use Quine's set theory, *New Foundations*.[9] The question of what the *proper* set-theoretic foundation of

[5] See the quotation at the beginning of this section.

[6] The argument is well known. A possible way to present it is the following: if the collection of all sets, V, was a set, then the collection of all its subsets, $\wp V$, would be a set included in V, contradicting Cantor's theorem.

[7] Compare with Feferman (2006) pp. 2–3.

[8] We use framework as synonym of metatheory or foundational system.

[9] The interested reader should consult Feferman (2006).

category theory is can be misleading. We could argue that category theory, as any other mathematical subject, does not need any foundation either for its own internal development, or for understanding it. Nevertheless, once we have raised the question, we find that different solutions are at our disposal. As we will see none of the set-theoretical proposals we will consider definitely solve the problem. However, we stress that to a great extent each of these proposals is expressive enough to cover most of the cases of interest for the "working mathematician".

An important part in the debate of foundations of category theory that deserves a treatment on its own, is the possibility to regard category theory itself as a foundational theory. The idea to consider category theory as a universal language capable of interpreting the entire mathematical edifice has been firstly proposed by Lawvere in the mid 60s. His research has led to a purely categorical description of the category *Set*. Nowadays, after his influential paper,[10] it is common to refer to these axioms with the acronym ETCS: Elementary Theory of the Category of Sets.

From a philosophical perspective, the project of Lawvere is intertwined with what has been called *categorical structuralism*.[11] As recent debates have shown, progress is impossible without a preliminarily agreed understanding of what is meant by the use of adjectives "structural" and "foundational" in this context.[12] Close to categorical structuralism, but not coinciding with Lawvere's position, is the idea to regard category theory as a foundation because of its *unifying character*. This position emerges for example in Marquis[13] and has recently been supported by some novel results discovered in topos theory.[14]

We finally mention a recent area of research that investigates set theory from a novel categorical perspective: Algebraic Set Theory (AST). The main goal of AST is to give a uniform categorical description for set-theoretical formal systems. Without addressing directly any foundational issues, AST focuses on bringing to light algebraic aspects of these systems by means of category theory.[15]

We can now focus on the organisation of the foundational proposals that we consider. The frameworks we will treat are the following:

- an approach internal to ZFC,
- NBG and MK,[16]
- Grothendieck's universes,
- Mac Lane's proposal,
- Feferman's proposal.

The first two set theories have in common the idea of using the notion of *class* to interpret the notion of *size* arising in category theory. The other three, instead, make use (in a more or less explicit way) of the notion of *universe* in order to better approximate the distinction *small*/*large*. Inspired by Shulman (2008), we suggest a possible recast of these proposals by means of these central notions.

[10] Lawvere (2005)

[11] See for example Awodey (1996), McLarty (2004).

[12] The interested reader should consult Hellman (2003) and Awodey (2004).

[13] See Marquis (2009).

[14] See Caramello (2010).

[15] A standard reference for AST is the book Joyal (1995). For a complete bibliography the reader should visit http://www.phil.cmu.edu/projects/ast/.

[16] MK is the acronym for Morse-Kelley set theory.

Before giving the details of these possible solutions we recall, in the next section, some specific examples of theorems "sensitive to the mathematical framework".

3 Examples

To give an idea of the ubiquity of notions of size in category theory we recall some basic results and definitions where these concepts play an important role[17]

Definition 1 (locally small category). *A category $\mathbb{C}$ is called locally small if, given two objects, a and b, the collection of morphisms between them, $Hom_{\mathbb{C}}(a,b)$, is small.*

If a category $\mathbb{C}$ is locally small then there exists the Hom-functor:

$$Hom_C : C^{op} \times \mathbb{C} \to Set.$$

Examples of locally small categories are: *Set*, *Grp* and in general all the categories built from "sets-with-structure". Given two locally small categories $\mathbb{C}$ and $\mathbb{D}$, the category of functors between them, $\mathbb{D}^{\mathbb{C}}$, is not in general, locally small.

A central notion in category theory is that of complete category: also in this case instances of the notion of size are explicitly involved.

Definition 2 (complete category). *A category $\mathbb{C}$ is said to be* ***complete*** *if every functor $F : J \to \mathbb{C}$, whose domain is a small category J, has limit.*

Examples of complete categories are: *Set*, *Grp*, *Rng*, *Comp Haus*. When the category is both small and complete, then it is just a preorder. Actually something stronger holds:

Theorem 2. *If a category $\mathbb{C}$ admits limits for any functor $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, with $\mathbb{D}$ any discrete category, then $\mathbb{C}$ is a preorder.*

For the proof see Borceaux (1994), proposition 2.7.1. This theorem explains why, in order to have a notion of *completeness* which makes sense for all categories, it is reasonable to ask for limits just for those functors whose domain is a small category J.

Another important theorem which is usually quoted when debating foundational issue in category theory is *Freyd's adjoint theorem*. We briefly recall some definitions which occur in the body of this theorem.

Definition 3. *A category is said to be* ***well-powered*** *if each of its objects admits a poset of subobjects.*

Definition 4. *A family Q of objects in a category $\mathbb{C}$ is called* ***cogenerating*** *if, given two parallel distinct morphisms, $f \neq g : a \to b$, there is a morphism $h : b \to q$ with $q \in Q$ such that $hf \neq hg$.*

Theorem 3. *Given a locally small, complete, well-powered, category $\mathbb{C}$ endowed with a cogenerating set, and a category $\mathbb{D}$, locally small, a functor $G : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ has a left adjoint if and only if it preserves small limits.*

[17] Most of the examples here and in the rest of the paper can be found in Shulman (2008).

For the proof see Lane (1998) ch. 5, par. 8. Note that this theorem relies essentially on some notion of size. If the theorem is expressed just for small categories we obtain the following.

Corollary 4. *Given a complete lattice, $\mathbb{C}$, a lattice morphism, $G : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, which preserves infima has a left adjoint.*

Clearly this corollary is just a shadow of Freyd's adjoint theorem. The significance of this latter can be appreciated if we think that in some cases this result represents the only device to build an adjunction.

4 Large categories and classes

small = "set" / large = "class"

Classes (more precisely proper classes) arise in classical set theory (ZFC) as those logical formulas without proper citizenship in models of set theory. They are built from set-theoretical formulas by means of unrestricted comprehension, and, even without a proper ontology,[18] they are commonly introduced as a useful device for manipulating formulas they abbreviate. As we are going to see in the next paragraphs, classes represent possible candidates to interpret large categories in a set-theoretical framework.

4.1 An approach internal to ZFC

A possible choice to give meaning to the notion of **large** categories is suggested by the usual convention adopted to introduce **classes** in ZFC. A class in the language of ZFC is a formal expression of the form $x|\phi(x)$ where ϕ is a formula of the language of ZFC. Every set can be seen as a class (of its elements) but, by Russell's paradox, the converse is not true. We say that a class is a **proper class** if it is not a set.

Example 5. *The class of all sets, V, is defined by the formula*

$$V := \{x|x = x\}.$$

Another well-known proper class is the collection Ω of all ordinals. By the Burali-Forti paradox it cannot be a set.

The idea of this foundational recipe is very simple: we call a category *large* when the collection of its objects is a *proper class*.

One virtue of this approach is to work internally to ZFC: even if we cannot directly manipulate large objects we are still able to work with the properties (logical formulas in the language of ZFC) which define them. In this way we still have the possibility to perform simple basic constructions over large categories: for example if ϕ and ψ are formulas of ZFC we can still form the class of pairs whose first element satisfy ϕ and whose second element

[18] They don't have proper ontolgy since they are outside the domain of discourse described by the axioms. Following Quine we can say that classes "do not have being" since they are not values of bound variables.

satisfy ψ, i.e. we can form the cartesian product of the two categories corresponding to ϕ and ψ.

The real problem of this approach is that ZFC cannot quantify over classes: theorems saying "there is a category such that..." or "for every category..." cannot even be stated in ZFC (one example is given by Freyd's adjoint theorem). Therefore, if we choose this foundational framework, we are led to reformulate most of our theorems as meta-theorems, which seems quite unpleasant from a foundational perspective.

4.2 NBG and MK

The most common set theory which introduces an ontology both for classes and sets is von Neumann, Bernays and Gödel's set theory (NBG). We briefly recall the axioms

(i) *axioms in common with ZFC*: pair, union, infinity, powerset;

(ii) *axioms both for sets and classes*: extensionality, foundation;

(iii) *axiom of limitation of size*: a class is a set if and only if it is not in bijection with the class of all sets V.

(iv) *axiom schema of comprehension*: for every property $\varphi(x)$, without quantifiers over classes, there exists the class $\{x|\varphi(x)\}$.

The system NBG is a conservative extension of ZFC: every sentence, *relative to sets*, which is provable in NBG, is already provable in ZFC. Therefore having NBG as a foundation does not imply any particular ontological commitment. The differences with ZFC are mainly at a stylistic level.[19] As we mentioned in the first paragraph the use of NBG as a possible foundation for category theory trace back to the original paper of Eilenberg and Mac Lane.[20] The advantage of NBG with respect to ZFC consists essentially in the explicit treatment of classes: several constructions become easier, and, moreover, it is legitimate to quantify over classes. As suggested in Shulman (2008), another interesting feature of NBG consists in the possibility of adopting a form of **global choice**. This, surprisingly, is an easy consequence of the axioms. Consider the following observation due to von Neumann:

Theorem 6. *In NBG, the class of all sets, V, is well-orderable.*

Proof. The class Ω of all ordinals is a proper class and it is well-ordered. By the axiom of limitation of size this class is in bijection with V. This bijection induces a well order on V. □

The fact that V is well-orderable is one of the possible formulations of the axiom of choice for classes; in category theory the possibility to have this large choice is sometimes essential. In fact we are generally assuming it when choosing representatives of universal constructions over large categories. Despite these good points, and the several advantages over the approach internal to ZFC, NBG still presents some problems as a possible foundational framework for category theory: one, for example, is the use of comprehension restricted to formulas not

[19] Historically the interest in this system have been motivated by the search for an equivalent system to ZFC which was finitely axiomatizable.

[20] S. Eilenberg (1945).

involving classes.[21] A possible solution is then to strengthen the axioms of NBG by allowing for arbitrary quantification in the formulas involved. The resulting theory is known as Morse-Kelley set theory (MK). In this case, however, we have lost conservativity over ZFC, and the theory we end up with is genuinely stronger than ZFC.

In all the cases examined so far, a central problem has still to be overcome: none of these systems allow for the construction of the category of functors between two arbitrary categories. We can form the category of functors from a small category to an arbitrary one,[22] but this construction still remains illegitimate when the domain of these functors is a large category. However, to a great extent all these systems are expressive enough to cope with the cases of interest: even if the functor category seems a perfectly reasonable construction which can be performed regardless of size issues, most of category theory can be developed confining our attention to those functors whose domain is a small category. This limitation is consistent with the one on completeness.[23]

In summary, the foundational frameworks considered so far fulfil (with different degrees of approximation) the requirements (A) and (B) (p. 4), but none of them manages to satisfy (C) in its full generality. To sum up relative consistency of these systems (D) we can say that V_α models ZFC if and only if $(V_\alpha, Def(V_\alpha))$[24] models NBG. If α is an inaccessible than $(V_\alpha, V_{\alpha+1})$ models both NBG and MK.

5 Large categories and Universes

$\boxed{small = \text{“}\in U\text{”} \; / large = \text{“}\in U\text{”}}$

It is difficult to trace back to the first appearance of the concept of a universe. Essentially, it captures the idea of a collection closed under certain operations. But why introduce universes in the context of set-theoretic foundations of category theory? As Shulman (2008) suggests, we can reason as follows: on an *informal* level what we need for freely manipulating large categories seems to be a theory of classes which resembles closely ZFC; in practice it should be enough to have two copies of the axioms of ZFC, once for sets, once for classes. On a *formal* level, **universes** are introduced as a more elegant (and economic) solution to the same problem: instead of rewriting twice the axioms of ZFC we identify specific sets in our system as good candidates to interpret *large* collections.

5.1 Grothendieck's universes

As the name of this subsection suggests, the use of *universes* as foundational recipe for category theory goes back to Grothendieck. The purpose of his project, closely related to Bourba-

[21]When proving a statement $\varphi(n)$ by induction in ZFC or NBG we usually form the set $\{n \in N | \neg\varphi(n)\}$ and then use the fact that N is well-ordered. Since this argument involves an istance of comprehension, it can be carried on into these systems just in case φ does not involve quantifiers over classes.

[22]This is allowed in all the cases examined so far: for example in ZFC a functor $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, where $\mathbb{C}$ is a small category, is itself a set by replacement, and therefore the collection of all these functors form a class.

[23]See here definition 2.

[24]$Def(X)$ denotes the set of all the subsets definable from element of X, i.e. sets of the form $\{x \in X | \varphi(x)\}$, where $\phi(x)$ can contain parameters from X and all its quantifiers range only over elements of X.

ki, was to justify the use of category theory in mathematical practice (and in Grothendick's perspective specifically in Algebraic Geometry).

Here is the definition of universe:[25]

Definition 5. *A set U is a **Grothendieck universe** if the following conditions hold:*

(i) if $y \in x \in U, then y \in U$*;*

(ii) if $x, y \in U, then \{x, y\} \in U$*;*

(iii) if $x \in U, then \wp(x) \in U$*;*

(iv) if $(x_i)_{i \in I}$ *is a family of elements of* U*, and* $I \in U$*, then* $\bigcup_{i \in I} x_i \in U$*.*

In words, the definition says that U is a Grothendick universe if it is a transitive set closed under pairs,[26] power set and union of elements of U indexed by an element of U. In a more set-theoretical flavour, we can describe this definition as requiring $U = V_\kappa$ for some inaccessible cardinal κ (under the added hypothesis that U is uncountable[27]). Since inaccessible cardinals cannot be proved to exist in ZFC,[28] asserting the existence of a Grothendieck universe is a genuine strengthening of ZFC's axioms.

For a fixed Grothendieck universe U, we can rephrase our dichotomy between small and large by calling a category *large* whenever its collection of objects is a set *not belonging to* U. In case the universe is uncountable this is equivalent to assert that a category is small if and only if its collection of objects has *rank* less than κ, where κ is inaccessible.

This third approach, does not just give a satisfactory solution to conditions (A) and (B) (page 4), but it also allows for the construction of the category of functors between arbitrary categories (requirement C). In addition, it gives a more expressive semantics for the term *large*: we do not collapse every large collection to the size of V, as it happens in NBG, but we can retain a more careful distinction between *small*, *large* and *even larger* categories.

The following example gives an idea of the expressive power that we reach when introducing universes in the metatheory.

Example 7. *Every large category* $\mathbb{C}$ *has a category of presheaves* $Set^{\mathbb{C}^{op}}$*, and, if* $\mathbb{C}$ *is locally small*[29] *we can consider the Yoneda embedding* $y : \mathbb{C} \hookrightarrow Set^{\mathbb{C}^{op}}$*.*

Nevertheless we might want to be able to *encode* more abstract nonsense, and not satisfied by a single universe, we would like to have at our disposal a bigger universe U' (i.e. another inaccessible cardinal $\lambda > \kappa$), and then one other above.[30] For this reason Grothendieck's initial proposal consisted of adding not just a single universe but an abundance. Formally we can express this by adding to the usual axioms of ZFC the following:

[25] In the original presentation (Bourbaki (1972), p. 185) the definition of universe also includes closure under ordered pairs which are a primitive notion in Bourbaki's presentation.

[26] We do not assume as primitive the notion of ordered pair but, as usual, we define them à la Kuratowski: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

[27] If we do not make any condition on the cardinality of U, also the emptyset, $\emptyset$, and ω are Grothendieck universes.

[28] A simple argument is the following: since V_κ, for κ inaccessible, represents a model of ZFC, if it was possible to prove the existence of such a cardinal in ZFC, then ZFC would also prove its own consistency, contradicting Gödel's second incompleteness theorem.

[29] See table on page 14 for the definition of a locally small category in presence of a universe.

[30] One possible reason is that we do not want just to consider the category of all small categories but also the category of all large ones, or of all locally small ones. . .

Grothendick's axiom*. Every set is contained in some universe.*

This axiom guarantees the existence of sufficient large sets where every possible category we can meet is included.[31] Clearly, we have moved far from the strength of ZFC: the system obtained by adding Grothendieck's axiom to ZFC has the same consistency as ZFC + "there exist inaccessible cardinals of arbitrary size". As noticed by Mac Lane[32] this axiom does not solve definitely all the problems. We do not have any a priori certainty that changing universe does not affect the construction of our categories, or preserves all the properties of a specific object. Consider the following example

Example 8. *Let us assume that we have proved, for some property ϕ, the existence of a group G such that $\phi(G, H)$ is true for every small group H (for example ϕ could tell us that G is the limit of some diagram in* Grp*). The same argument still holds if we interpret the notion of largeness with some specific inaccessible κ, but there is no guarantee that the group G will be the same under all the possible interpretations.*

As kindly pointed out by one of the anonymous referees, in order to obtain this stronger property we should ask for the universe U to be an elementary substructure of V. For this, stronger axioms of infinity are needed, namely we have to ask for the cardinality of the universe to be at least a Mahlo number. The introduction of such large cardinals can be related to a general reflection principle for ZFC.[33] Even if the existence of these cardinals are given by axioms stronger than the one asserting the existence of a single inaccessible, and also stronger than Grothendieck's axiom, these axioms are still quite "weak" if compared to current large cardinal axioms used by set theorists. A similar approach based on a general reflection principle has been sketched by Engeler and Röhrl (1969). The following quotation concludes the paragraph where the two authors describe their proposal:[34]

> [...] However, the main objection to this approach is quite independent of the strength and questionability of the additional assumptions creating universes. We believe that it is a faulty to make a procrustes bed of set theory and try, bend or break, to fit all mathematical structures into it. This does injustice, in particular to category theory, as it denies the autonomous role that such theories play in mathematics.

To conclude our survey of the use of universes as foundation for category theory, we can sum up the situation with the following table:[35]

[31]As Shulman (2008) notes, this axiom asserts the possibility to enlarge the universe, more than asserting the existence of multiple stratified universes.

[32]See Lane (1969), p. 2.

[33]The interested reader should consult Lévy (1960). We will come back on a much weaker formulation of the reflection principle in section 5.3.

[34]See E. Engler (1969), p. 62.

[35]Observe that we can always identify objects of $\mathbb{C}$ with identity morphisms. In this table we indicate with *Morph($\mathbb{C}$)* the collection of morphisms of a category $\mathbb{C}$, and with *$Hom_{\mathbb{C}}(c,d)$* the set of morphisms between two given objects c, d of $\mathbb{C}$.

small	$Morph(\mathbb{C}) \in U$
locally small	$\forall c, d \in Obj(\mathbb{C}) \in U$ $Hom_{\mathbb{C}}(c, d) \in U$
large	$Morph(\mathbb{C}) \subseteq U$, $Morph(\mathbb{C}) \notin U$
enormous	$Morph(\mathbb{C}) \nsubseteq U$

5.2 Mac Lane's proposal

> [...] It turns out that a flexible and effective formulation of the present notions of category theory can be given with a more modest addition to the standard axiomatic set theory: the assumption that there is **one** universe.
>
> Saunders Lane (1969), p. 193.

As we have already mentioned in the last paragraph, one of the first mathematician who highlighted some problems of the foundational approach proposed by the French school of Grothendieck was Saunders Mac Lane, one of the founders of category theory.

In 1969 Mac Lane published a paper with a meaningful title: *One universe for the foundations of category theory*. In this work he argues that the existence of a single universe in ZFC is sufficient to have a foundational framework for category theory. His proposal essentially consists in weakening Grothendieck's axiom asking, not for an abundance of universes, but just one.

Mac Lane defines a universe as follows:

Definition 6. *A set U is called a universe if:*

(1) $x \in y \in U implies x \in U$;

(2) $\omega \in U$;

(3) $x \in U implies \wp(x) \in U$;

(4) $x \in U implies \bigcup x \in U$;

(5) if $f : x \to y$ *is a surjective function such that* $x \in U$ *and* $y \subset U$*, then* $y \in U$.

As Mac Lane notices, the conjunction of condition (4) and (5) is equivalent to condition (*iv*) in definition 5. Apart from this and the requirement that U is uncountable (condition (2) and (3)), the definition is the same as that given by Bourbaki.[36]

In this framework the systematization of the dichotomy *small/large* is essentially the same as that of Grothendieck's school (See table on page 14). The restriction to a single

[36]We also recall the treatment of ordered pairs as a primitive entity, characteristic of Bourbaki's approach.

universe allows for a (almost[37]) complete treatment of category theory and, at the same time, allows us to escape from the "jungle" of multiple universes.[38]

Finally we remark that consistency of Mac Lane's proposal amounts to the consistency of ZFC + "there exists a strong inaccessible cardinal".

5.3 Feferman's proposal

Foundations of category theory have represented a problem of major interest for Solomon Feferman, who came back to this topic several times during the last forty years. He dedicated four papers[39] to this issue, proposing more than a single solution. Here we confine ourselves to the analysis of his first proposal.

The first paper where Feferman addresses the question was published in 1969.[40] In this work he proposes an alternative to the solution of adopting new axioms for universes. Feferman's idea consists in using a well-known principle of set theory, namely the *reflection principle*.

Feferman's system, which we indicate as ZFC/s,[41] consists, in the first instance, in adding a new constant symbol s to the usual language of ZFC. Secondly we add to the axioms of ZFC further axioms in order to describe (the interpretation of) s as a natural model of ZFC.[42]

Before giving the axioms we recall that if φ is a formula of the language of ZFC, its relativization to s, denoted by φ^s , is given when all the quantifiers that occur in φ are bounded by s.[43]

Definition 7. *The system ZFC/s is given in the language $\mathcal{L}$ of ZFC extended with the constant symbol s by the following axioms:*

(1) Axioms of ZFC: extensionality, emptyset, pairs, union, powerset, infinity, foundation, replacement, choice.

(2) s is not empty:

$$\exists x(x \in s)$$

(3) s is transitive:

$$\forall x, y(y \in x \land x \in s \rightarrow y \in s)$$

(4) s is closed under subsets:

$$\forall x, y(x \in s \land \forall z(z \in y \rightarrow z \in x) \rightarrow y \in s)$$

(5) reflection axioms: for every formula φ with free variable $x_1,\ldots, x_n$:

[37]This approach does not allow for the construction of the category of all large categories.

[38]As remarked by one of the anonymous referee, the request of a single universe U inside V could be seen as a kind of opprobrium from the point of view of a set theoretician. An alternative solution to the universe juggling has been mentioned at the end of the last section: see for example E. Engler (1969).

[39]Namely Feferman (1969), Feferman (1977), Feferman (2006), Feferman (2004).

[40]See Feferman (1969).

[41]the symbol s stands for *smallness*.

[42]A natural model of ZFC, (M, ϵ), is a transitive model of ZFC, closed under subsets: $x \subset y \in M$ implies $x \in M$.

[43]For example, the relativization to s of the formula $\forall a \exists b \forall x(x \in b \leftrightarrow \psi(x, a))$ is

$$\forall a \in s \exists b \in s \forall x \in s(x \in b \leftrightarrow \psi s(x, a)).$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n(\varphi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \varphi^s(x_1,\ldots,x_n))$$

The axiom schema (5) can be read in model-theoretic terms as follows: let (M,ϵ,S) be a model of ZFC/s,[44] call M_s the set $\{x \in M | x\epsilon S\}$, and ϵ_s the restriction of ϵ to M_s,[45] , then (M,ϵ) is an elementary extension of (M_s,ϵ_s). In other words the two models satisfy the same formula in the language $\mathcal{L}$.

As we mentioned, this axiom schema, is based on the reflection principle. A specific istance of this principle can be suitably reformulated as a theorem of ZFC. It might be helpful to highlight the common point this *reflection theorem* shares with the downward Löwenheim-Skolem theorem. The proof of the latter shows, given a model N of a theory T and an infinite subset $S \subset N$, how to build a model M, such that $M \prec N$ (M is an elementary substructure of N) and $|N| = |S|$. In order to obtain the model M we build a sequence of sets M_n in this way: starting from $M_0 = S$ every M_{n+1} is obtained from M_n by adding a witness $b \in N$ for every existential sentence $\exists y\phi(y,x_1,\ldots,x_n)$ and every n-tuple of elements $a_1,\ldots,a_n \in M_n$ such that $\exists y \in N\phi N(y,a_1,\ldots,a_n)$ is a true sentence. M is then obtained as

$$M = \bigcup_{n\in\omega} M_n.$$

Since there are just a countable amount of sentences ϕ, the cardinality of the various M_n never increases. Finally, the countable union of countable sets is still countable from which it follows that $|M| = |S|$. This construction can be rearranged to be carried out on the cumulative hierarchy of V_α's. Even if this method enables us "to build models of ZFC", this does not violate Gödel's second incompletness theorem. Indeed even if we can reflect every finite conjunction of sentences of ZFC, we are not able to reflect at once a single infinite conjunction of sentences expressing that V_κ is a natural model of ZFC for a specific κ.

One of the main advantages of this "logical" approach consists exactly in this: the "formal description" of s as a "natural model of ZFC" is not sufficient to prove in ZFC that (the interpretation of) s is a natural model of ZFC. This, in fact, allows Feferman to prove the following important result in Feferman (1977):

Theorem 9. *ZFC/s is a conservative extension of ZFC.*

This result guarantees that we have not really strengthen our starting set theory; in particular, in categorical terms this means that all that can be proved in ZFC/s about *small* objects, even using *large categories*, can already be proved in ZFC. Now it should be sufficiently clear that interpreting *small* as "element of S" and *large* as "set not necessarily in S", what we have is an appropriate foundational framework where it is possible to interpret definitions and theorems of category theory.

As in the other cases we can evaluate the expressive power of Feferman's system using the conditions on page 4. While we can check that ZFC/s easily meet (A), (B), (D), the problem with functor categories noticed with other systems is also complicated in this case: we do not only have a limitation of size for the domain of the functors, but we also have to confine ourselves to consider those functor categories whose objects are S-definable. This is a consequence of the relativization of the replacement axioms to s, which can be considered to express the

[44] We indicate with S the element of M which interprets the constant symbol s.

[45] i.e. $x\epsilon_s y$ iff $x,y \in M_s$ and $x\epsilon y$.

inaccessibility of s under all functions definable in $\mathcal{L}$.[46] In other words, if we read the replacement axioms as saying that the image of a set under a class-function is still a set, their relativization can be rephrased as stating that the image of a set under a function-class *which is definable from elements of S* is still a set. This restriction, even if apparently innocuous, can have annoying consequences: for example we should change the notion of completeness (definition 2) in ZFC/s, requiring limits for "all small functors" (i.e functors definable from S) rather then for all functors with small domain.

5.4 Some comments on Feferman's proposal

Feferman has been one of the first mathematical-logicians to get interested in foundations of category theory: his motivation has been primarily to fill the gap between the rapid development of category theory and its proper systematization inside the mathematical edifice.

Initially a careful attitude led him to investigate the foundations of this theory with different systems of set theory. Only later he turned his attention to a critical analysis of a categorical foundation of all mathematics.[47]

The system proposed by Feferman in Feferman (1969) and the conservativity result over ZFC are of particular interest for a foundational analysis of category theory. The relevance of Feferman's contribution is well expressed in the words of Blass[48]

> This approach developed in Feferman (1969), has two advantages. First, the assumptions guarantee that, if we prove a theorem about small sets by using large categories, then the same theorem holds for arbitrary sets; [...]. Second, the assumptions do not really go beyond ZFC; any assertion in the first-order language, not mentioning κ,[49] that can be proved using these assumption can also be proved without them.

The second feature of Feferman's system mentioned by Blass is the conservativity result of the previous paragraph (theorem 9). This theorem highlights the "conventional" use of inaccessible cardinals when discussing set-theoretic foundation of category theory. As Shulman notes:

> [...] Thus we obtain a precise version of our intuition that the use of inaccessibles in category theory is merely for convenience: since many categorical proofs stated using inaccessibles can be formalized in ZFC/s, any *consequence* of such a theorem not referring explicitly to inaccessibles is also provable purely in ZFC.

Even if inaccessible cardinals, and in general stronger axioms of infinity, have became part of modern mathematical research, their use in foundational contexts remains dubious. Again, in the words of the philosopher Marquis:[50]

> Any reference to inaccessibles is simply removed. This is an exact formulation of the conviction that questions of size are only used to justify certain general construction and they do not bear on the real mathematical content of the construc-

[46] See Feferman (1969), p. 208.

[47] The main argument of his criticism for a possible categorical foundation of all math was firstly formulated in his '77 paper Feferman (1977). He then came back to the same argument in his successive works.

[48] Blass (1984), page 8.

[49] Blass uses κ to indicate the level of the cumulative hierarchy which corresponds to the interpretation of the added constant symbol s in Feferman's system.

[50] Marquis (2009), pp. 183-184.

tions and its consequences. [...] Feferman's results[51] are important for they can be interpreted as showing that *as far as set theory is concerned*, category theory does not raise *new* foundational problem.

[51]The reference is to Feferman (1969).

Riferimenti bibliografici

Awodey, S. (1996). Structuralism in mathematics and logic. *Philosophia Mathematica 3*(4). 48

Awodey, S. (2004). An Answer to G. Hellman's Question "Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism?". *Philosophia Mathematica 1*(12). 48

Blass, A. (1984). The interaction between category theory and set theory. In J. Grey (Ed.), *Mathematical Application of Category Theory*. Contemporary Mathematics, vol. 30. 58

Borceaux, F. (1994). *Handbook of categorical algebra 1. Basic Category Theory*. Cambridge University Press. 49

Bourbaki, N. (1972). Univers. théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1: Théorie des topos. In *Seminare de Geometrie Algebrique du Bois-Marie 1963-1964 (SGA 4)*, pp. 185–217. Berlin: Springer-Verlag. 53

Caramello, O. (2010). The Unification of Mathematics via Topos Theory. 48

E. Engler, H. R. (1969). On the Problem of Foundations of Category Theory. *Dialectica 3*(1). 54, 56

Feferman, S. (1969). Set-Theoretical Foundations of Category Theory. *Reports of the Midwest Category Seminar III, Lecture Notes in Mathematics 106*, 201–247. 56, 58, 59

Feferman, S. (1977). Categorial foundations and foundations of category theory. In *Logic, foundations of mathematics and computability theory*, Dordrecht, pp. 149–169. Fifth Internat. Congr. Logic, Methodology and Philos. of Sci.: Reidel. 56, 57, 58

Feferman, S. (2004). Typical ambiguity: trying to have your cake and eat it too. In G. Link (Ed.), *One hundred years of Russell's paradox*. Berlin. 56

Feferman, S. (2006). Enriched stratified system for the Foundation of Category Theory. In G. Sica (Ed.), *What is category theory?* Milano: Polimetrica. 1, 47, 56

Hellman, G. (2003). Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism? *Philosophia Mathematica 11*(2). 48

Hofstadter, D. (1979). *Gödel, Escher and Bach. An eternal Golden braid*. New York: Basic Book Inc. Publisher. 45

Joyal, A. (1995). *Algebraic set theory*. cambridge University Press. 48

Lane, S. M. (1969). One universe as a foundation for category theory. In S. M. Lane (Ed.), *Reports of the Midwest Category Seminar, III, Lecture Notes in Mathematics*, Volume 106, pp. 192–200. New York: Springer-Verlag. 54, 55

Lane, S. M. (1998). Categories for the working mathematician. In *Graduate Texts in Mathematics, second edition*, Volume 5. Springer. 50

Lawvere, F. W. (2005). An elementary theory of the category of sets (long version). In *Reprints in Theory and Application of Categories*, Volume 11. 48

Lévy, A. (1960). Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory. *Pacific Journal of Mathematics* (10), 223–238. 54

Marquis, J. P. (2009). From a geometrical point of view. A study of the History and Philosophy of Category Theory. In *Series: Logic, Epistemology, and te Unity of Science*, Volume 14. Springer. 48, 58

McLarty, C. (2004). Exploring categorical structuralism. *Philosophia Mathematica 3*(12). 48

S. Eilenberg, S. M. L. (1945). A General Theory of Natural Equivalences. *58*(2), 231–294. 45, 51

Shulman, M. A. (2008). Set theory for category theory. 48, 49, 51, 52, 54

Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 http://www.rifanalitica.it
Sponsored by *Società Italiana di Filosofia Analitica*

HISTORY AND BECOMING OF SCIENCE IN JEAN CAVAILLÈS

Lucia Turri

ABSTRACT. This paper is focused on Cavaillès' theory of science and his peculiar epistemology. In order to understand the position of Cavaillès concerning the becoming of mathematics, it is necessary to start from the way he utilizes the historical method inherited from Brunschvicg. In Cavaillès' works, historical analysis is not reduced to a mere reconstruction of the past, but is regarded as an instrument to find the necessity that characterizes the movement of science. This movement is originated by the tensions between a necessary internal push and historical contingency, and it goes at its own pace, being determined by nothing else but the mathematics itself. Therefore, Cavaillès also states the failure of all foundational projects and affirms the complete autonomy of the becoming of mathematics, which develops as a dialectic unforeseeable concatenation of concepts.

KEYWORDS. History, Becoming, Dialectic, Necessity, Movement, Cavaillès, Bolzano.

AUTHOR. Lucia Turri. lucia.turri3@gmail.com
RECEIVED. 7th September 2011 **ACCEPTED.** 30th September 2011

1 Jean Cavaillès: a life between mathematics, philosophy and Resistance

Ambivalent figure of mathematician and philosopher, thanks to his double background and cross-sectional competences in both fields, Jean Cavaillès (1903-1944) has left a great theoretical contribution to the 20th century French epistemology. His works[1]are extremely complex and synthetic; maybe for this reason his epistemological work has often been the object of sketched researches, while bigger attention had been dedicated to his biography, especially to his Resistance activity in France. Just because of his militancy in the Resistance movement, Jean Cavaillès was imprisoned and then shot by Nazis, when he was only 41 years old. In the light of this biographical element, we can understand why his works are scarce.[2] Although he only had few years to work, he however succeeded in leaving an important and original contribution to the philosophy of mathematics of the last century. We can start sharing the Canguilhem point of view: Jean Cavaillès has written too little to be summed up and enough to make us catch the meaning of his philosophical issue.[3] We especially think that it is really interesting to study the epistemological bridge that he was able to build to unify what were, in his understanding of the knowledge, two banks of the same river: mathematics and philosophy. To remain in this metaphor, the nature of water that flows into these two banks emerges when inquiring characteristics of the becoming of science.

2 The historical epistemology

2.1 The historical method

According to Cavaillès, the becoming issue of mathematics must be assessed starting from the massive methodological and epistemological value of history. The topic of history and a certain style of "historical epistemology" are an inheritance of his master Brunschvicg. In his whole production, Cavaillès will keep them as crucial clues, as unavoidable elements and necessarily coexistent with the occurrence of mathematics. Therefore, only in history we can find moments of evolution, links, epistemological gaps which characterize mathematical dialectic, i.e. dialectic as a becoming along a path that is a necessary chain:

> Cavaillès bases his researches on historical analysis. He focuses on mathematics becoming, on overtaking processes, thanks to its objects systems enlarge, turn

[1]The whole Cavaillès' work, consisting in only 686 pages altogether, is gathered up in (Cavaillès 1994). This text collects the reprint of *Méthode axiomatique et formalisme* (1938), the main doctoral thesis, directed by Léon Brunschvicg; *Philosophie mathématique* (1962), wich consists in: the second doctoral thesis *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles* (1938), *Correspondance Cantor-Dedekind* (1937), translated by Jean Cavaillès and Emmy Noether, and the article *Transfini et continu* (1947); the posthumous writing *Sur la logique et la théorie de la science* (1947); the articles *L'école de Vienne au congrès de Prague* (1932), *Logique mathématique et syllogisme* (1935), *Réflexions sur le fondement des mathématiques* (1937), *La pensée mathématique* (1946), *Du collectif au pari* (1940), *La théorie de la science chez Bolzano* (1946), *Mathématiques et formalisme* (1949) and *In memoriam* di G. Canguilhem (*Inauguration de l'amphithêatre Jean Cavaillès*, 1967; *Commémoration à l'ORTF*, 1969; *Commémoration à la Sorbonne*, 1974; *Une vie, une Œuvre*: 1903-1944, Jean Cavaillès, *philosophe et résistant*, 1989). There is only a translation in Italian of *Sur la logique et la théorie de la science*, edited by V. Morfino and L. M. Scarantino (2006), Jean Cavaillès, *Sulla logica e la teoria della scienza*, Milano, Mimesis.

[2]Concerning the destiny of Cavaillès' work, the words of Bruno Huisman are emblematic: "When he died at the beginning of 1944 executed by the Germans, in Arras, Jean Cavaillès left a work that we can't consider as incomplete; it is an unfinished work, or better assassinated". See Présentation in (Cavaillès 1994).

[3](Canguilhem 1984, p. 23).

> more abstract and, starting from there, integrate the infinity. Inside the becoming, the overtaking processes prove an outgrowing faculty which belongs to the thought, a power to create.[4]

From the Cavaillès' historiographic reconstruction work, a peculiarity arises: the historical perspective does not aim at a mere reconstruction of the past, since it would be fruitless in itself, as dealing with the mathematics becoming. The historical research aims at considering movement complexity and wholeness starting from the mathematics achievement till a certain point, in order to observe the present position in that present time, as a starting point in the future becoming. Furthermore, the historical issue is not focused on the accomplished path to obtain a certain outcome, but more likely on the achieved goal, which includes, and at the same time leaves in the background, the whole previous path. The historical analysis lies in its core consisting of thought in act during the present time:

> In a certain way, the homogeneity of materials of the thinking process and the simultaneity of mathematics working on its present time are here asserted: empiricism as describing the actual work, but empiricism of the thought in act, referring only to the unpredictable mathematics becoming.[5]

In Cavaillès' point of view, there is a need to take a closer look at mathematics as the actual work in the actual time, like the actual operation accomplished by "militant" mathematicians every day.[6]The act of thinking completely revolves on *hic et nunc* and, instead of spreading towards what has been gained before, it suggests the unpredictable mathematics becoming channelling into the future. The accomplished act in the present is not considered only as an outcome of the past, but as a foundational moment for a movement forward, as a root for future work. The defining work exemplifies that channelling into the future:

> Defining ways are subjected to variations and demands of its movement: for every new acquirement, new possibilities rise up. The gaining of nameable concepts matches with scientific enrichment itself.[7]

2.2 A history which is not a history

To some extent, Cavaillès' statement leads to define what he himself attests as "a history that is not a history"[8]: the methodological choice of the use of history does not consist in a simple work of reconstruction of the past and does not confine in an unfruitful backwards look. In other words, it is not focused on understanding how notions and definitions used at some point have come out, but it is rather open to future perspectives, possible innovations that

[4](Cassou-Noguès 2001, p. 132).

[5](Cavaillès 1938c).

[6]The expression militant mathematician has a very strong meaning in Jean Cavaillès' works. He uses it at the end of *Méthode axiomatique et formalisme*, asserting that the last word on mathematical issues doesn't belong to the philosopher, but the militant mathematician. The militant mathematician is, in Cavaillès' point of view, the person who has a mathematical education and works with numbers, formulas, theories as well as, with a pencil on his hand, on symbols, figures, he makes demonstrations advisedly. Furthermore, the adjective militant reminds the military environment, word that Cavaillès knew well, at first as official in the French army, then as leader of a network of the Resistance. Being militant for Cavaillès has first of all a moral meaning: it implies the refusal of passivity, taking the social, political and everyday life in hand. At the same time, it also means to obey a necessity at a theoretical level. This necessity also correspond to the immanent necessity of the reasoning, to whom the thinking individual can't escape.

[7](Cavaillès 1938c, pp. 17-18).

[8](Cavaillès 1949, p. 664).

are going to enrich different scientific theories. Historical analysis looks backwards, but it is completely projected in the forwarding movement of science. This projection in the future corresponds to a need that comes from the nature of scientific work itself:

> If an element of irremovable uncertainty is left [. . .], its action does not lead back, the accomplished gesture remains actually valid (final validity of statements), but it leads forward to transform what is set (modification of the notions).[9]

Obviously the perspective interest centred on what is coming afterwards does not expect to be more than a sort of privileged point of you, as the "old" and the "new" ones are connected in an indissoluble way: the previous moment sustains the subsequent one, and *vice versa*, the subsequent moment justifies and explains the former one. As Gilles-Gaston Granger remarks, the old one subsists as it is only within the new one and, at the same time, necessary new contents follow the old ones.[10] Progress is a continuous generation where the inner movement produces the rise of new theories starting from the previous ones. On the one hand, mathematics becoming is characterized by adopting new theories and, on the other hand, by transforming old theories[11]: "Mathematics is an odd building whose progressive construction shifts and reshuffles its foundations".[12] In the history of mathematics, there is no substitution of a theory with another, but a deepening reflection. Mathematical notions and theories are not totally rejected, but gradually modified: the mathematical becoming implies transformation and permanence at the same time. [13]

Between the different moments (the old theory, the overcoming of that theory, the new theory) there is a continuity and it is up to the historian to analyze and reconstruct *a posteriori* the connection between the various stages of mathematical becoming and therefore to follow the necessary development of mathematical rationality. On the opposite, the role of the mathematician is different: he works on theories and concepts more innovative than the ones which are contemporary to him, he does not need to know the past at all, to some extent, he even "denies that by vocation".[14] Precisely because the history of mathematics is projected forward, the mathematician's work consists in leaning towards the future, which implies a rooting in the past at the same time, but also a denial of antecedent moments:

> The history of mathematics appears, among all histories, the less connected to its vehicle; if there is a connection, it is *a parte post* and it is only for curiosity, not for the intelligence of result: what is precedent explains what comes afterwards. The mathematician does not need to know the past because his vocation is to reject it: to the extent that he does not submit to what seems to go by itself because it is, to the extent that he rejects the traditional authority, and disregards the intellectual climate so as to be a real mathematician, he unfolds necessities. By doing so, what are the means he uses? The work that denies history takes place in history.[15]

[9](Cavaillès 1938c, p. 187).

[10](Granger 1998, pp. 65-77 and p. 70).

[11]«Double link: with the set and studied problems at that precise moment -choise to rebel-, with yet present methods, materials to make new instruments. In both cases, either the individual will or the style of an environment are sufficient explications: even if mathematics is conceived as a system in itself, the winding course of the revealing process should be related to the structure of the revealed elements». Cfr. (Cavaillès 1938b, p. 226).

[12](Cassou-Noguès 2001, p. 135).

[13]About this, also see Monti Mondella (1962, p. 532): «The recent past of this science [mathematics], he [Cavaillès] remarks, is not the history of results and contributions, that have been added for mere juxtaposition to the previous ones, but it is also a critical revision of its own foundations and of the structure of its own theories in a radical sense».

[14](Cavaillès 1938b, p. 226).

[15](Cavaillès 1938b, pp. 225-226).

2.3 The mathematician and the epistemologist: the mathematical development between necessity and contingence

The mathematician has no theoretical interest in reconstructing the historical circumstances that led to the current situation of mathematics. The history of concepts and theories, in fact, owes nothing to the contingency, "in spite of the winding process of revelation" [16]: the mathematician is the revealing person of needs, his curiosity and his research are all forward-becoming, directing his attention to find out what mathematical needs still have to reveal.

The theme of the peculiar role of a mathematician is of great interest to Cavaillès, who has been talking about it several times during his career. On February 4^{th}, 1939, the Société Française de Philosophie invited Jean Cavaillès and Albert Lautman (close friend and colleague[17]) to present and discuss together the results of their respective doctoral dissertations. From this meeting came the article *La pensée mathématique*.[18] From the very start, it is obvious that Cavaillès gives particular importance to the division of tasks between the epistemologist (also historian of mathematics) and the mathematician, because of two characteristic features of mathematical becoming: on the one hand, it is a process that unfolds in time, throughout history, through contingencies and accidents; on the other hand, it is an independent progress, in ceaseless becoming and unpredictability. The epistemologist and historian of mathematics has to question the path of history, the role of contingencies and interaction between disciplines in science becoming, the mathematician has to realize the becoming itself. Although the two elements of historical contingency and mathematical necessity are inseparable aspects, they are irreducible to each other:

> Mathematics is a peculiar becoming. It is impossible to reduce it to nothing but itself; but also, each definition at a given time, is connected to that very time, i.e. to the history it is the conclusion of: there is no definition that can be valid forever. Discussions about mathematics cannot be anything else, but re-doing it. This becoming seems independent; the epistemologist can realize the necessary sequencing [*enchaînement*] under the historical circumstances, concepts are introduced because of the inner needs of a problem solution and, thanks to their being earlier concepts, they raise new issues.[19]

Even if it seems paradoxical, there is no contradiction in what we might call the "non-historical history" of mathematics. After all, Cavaillès stated it clearly: "There is nothing so little historical – meaning the opaque becoming, perceivable only through artistic intuition – such as the history of mathematics".[20] The history of mathematics is very little historical precisely because mathematics is a true becoming: history marks stages and periods, but mathematics is a living movement, an organic whole,[21] which can not be reduced to a perio-

[16](Cavaillès 1938b, p. 226).

[17]The two young philosophers were tied not only by the common interest in the relationship between philosophy and mathematics, but also by friendship and the shared fight in French Resistance. On the relationship between Cavaillès and Lautman see (Aglan, Azéma 2002), (AAVV 1985), (AAVV 2003), «La Lettre de la Fondation de la Résistence», n. 34, (Bloch 2002), (Ferrières 1950), (Granger 2002), (Sinaceur 1987b).

[18](Cavaillès 1946a).

[19](Cavaillès 1946).

[20](Cavaillès 1938c, p. 184).

[21]About the organic unity of mathematic, see (Cavaillès 1938b, p. 225): These processes are linked in a organic body: a state of mind constitutes the secret base where the processes are founded with an outward unforeseeability. We must come back to this unforseeability if we really want to understand, without exposing, but continuing. There is a deep kinship that links the researchers (without realizing, as a sort of harmony) on the same subject in a precise moment, *vis a tergo*, objective impulse of the research itself.

dization or temporal systematization. Mathematics is a becoming that produces history and it is produced in history, nevertheless, mathematics and history have different contingent features that clarify the distance between them. History is mainly the place of contingency, intended as accidental: the history of mathematics is undoubtedly contingent, but its contingency has nothing to do with randomness. Mathematical becoming is a contingent and necessary becoming at the same time. Contingent, as it runs through the process of the history of human thought, but at the same time necessary, due to the nature of mathematics itself, which finds the reasons of its development within an inner autonomy, indifferent to any kind of requirement referred to problems external to mathematics becoming. Mathematics progresses and develops in a way that is intrinsically necessary, according to an independent movement in the light of which every solution, each discovery and each moment of forward progress emerges from the single stimulus of an inner need. Due to this inner impetus, the following moments generated from the problem raised in the required manner and within this movement, there is nothing accidental meant at random. Mathematics is an authentic rigorous discipline as mathematical methods are not arbitrarily isolated according to the needs of a particular problem in a given time. On the contrary, it requires a certainty to be obliged to strip every method used of any "*vêtement accidentel*"[22] of some particular cases and clarify the necessary and sufficient conditions for its application. Due this extent, the unpredictability of mathematics is just apparent.[23]

Although Cavaillès states in a certain way the unpredictability is only apparent, at the same time, he also thinks the mathematical becoming is authentically, formerly unpredictable. How to explain this unpredictability's dual nature, apparent and authentic at the same time, of the results of the mathematical progress? Precisely because this becoming is a real becoming, it develops unpredictably: "There is becoming for real: the mathematician is involved in an endeavour which he cannot stop but arbitrarily, in facts, every moment can bring a radical innovation".[24] As Houria Sinaceur highlights, at every moment, mathematics develops bringing out elements that are actually innovative and the necessary element appears *a posteriori*, for this reason it is a historical [25] achievement. The necessity of becoming must not be considered at all as a sort of determinism or teleology: "The development of mathematics is necessary, not because it follows established and predictable paths, or because it obeys schemes, but as it unfolds through the construction of relations between the results that their rational connections withdraw, so to say, from contingency".[26]

Just because mathematics is unpredictable, but not contingent, it "is subjected to an authentic becoming, which consists in setting new theories and especially in the transformation of previous theories. Now, the becoming, once recognized, gains primacy over succeeding periods it connects".[27] Cavaillès goes further, saying that mathematics is not only subjected to a ceaseless becoming, but it is a movement itself, it is in a peculiar becoming itself.

[22](Cavaillès 1938b, p. 225).
[23](Cavaillès 1938b, p. 225).
[24](Cavaillès 1946a, p. 594).
[25](Sinaceur 1994, pp. 31-32).
[26](Sinaceur 1994, pp. 31-32).
[27](Cassou-Noguès 2001, p. 136).

3 Characteristics of mathematics

3.1 Mathematics as movement and «enchaînement»

Mathematical becoming is characterized as singular becoming, totally autonomous, unforeseeable and historical. Let's start questioning what it means to define mathematics as a movement in a never ending and unremitting becoming. When Cavaillès deals with this becoming, he talks about a fact inside mathematics, an essential element inscribed into the mathematical reality itself: "The mathematical becoming has its own objectivity mathematically established".[28] Mathematics is a movement, a never-ending process of redefinition of problems and elaboration of new theories beginning from the revision of the previous ones, following a ceaseless chain appearing as an intrinsically and necessary linear progress. On this continuous path, gap moments could be individuated as epistemological breaks. Therefore, there are fractures only in appearance, because each moment is essentially connected to the previous one: "One of the problems of the doctrine of science is precisely that the advancement was not increased in volume by juxtaposition, so that the previous one subsists along with the new one, but the advancement is an uninterrupted revision of contents through close examinations and deletions".[29]

Therefore the becoming occurs as a *continuum* in a never-ending becoming, neither as alternating theories in contrast which develop by denial and opposition between the more recent and the outdated ones, nor as a simple quantitative increase of knowledge.

In the light of this uninterrupted activity of revision, the history of science outcome lies in the image of a chain, where any link is indissolubly connected to its previous one forming a chain extending to infinity through the addition of new links joining the former ones. The definition of Mathematic as «*enchaînement*» is the crucial basis of Cavaillès' thinking. As Hourya Sinaceur states:

> court history, but it is more likely the system that it reveals, i.e. the architectonic set of connections between notions, problems and mathematical methods, the layered and shifting network coherent with different moments, each of them is unpredictable, but still indissoluble. History is a necessary practise if we reckon the whole mathematics and thinking in general is a becoming. Nothing is set nor is acquired once and for all.[30]

Rationality develops according to the chain modality, both rationality in general and specific mathematics rationality. Reasoning evolves as a chain, like a gradual linking of operations; in other words, reasoning is facing problematic clues set in a necessary order of further development.

The modality along which reasoning develops mirrors the modality of production and progress of knowledge, transferring its peculiarities to it. In fact, theories themselves develop according to this modality, as "the establishment of a certain structure of concepts".[31]

3.2 Mathematics as an object *sui generis*. Bolzano's heritage

Cavaillès inherits from Bolzano the theme of mathematics as an object *sui generis*, irreducible to anything but mathematics itself. In fact, Cavaillès dedicates to Bolzano the last pages of

[28](Cavaillès 1938b, p. 226).
[29](Cavaillès 1947b, p. 560).
[30]Sinaceur, *Philosophie et histoire* in (Aglan & Azéma 2002, pp. 208-209).
[31](Cavaillès 1938c, p. 85).

the first part of his major posthumous work. This part of *Sur la logique et la théorie de la science* is a key step, and it was so accurate that it was published under the title *La théorie de la science selon Bolzano* in the first issue of «Deucalion» in 1946, edited by Canguilhem and Ehresmann. Bolzano is an author mentioned several times in Cavaillès' works, although during the years Cavaillès dealt with Bolzano, he was still unknown, despite his recognition by Husserl (to this extent a good example is in the *Appendix* of Chapter X of *the Prolegomena of Pure Logic*). It was Cavaillès who, between the two world wars, recognized the importance of Bolzano, particularly because he understood the meaning and role of a theory of science as a theory of the structure of science and of operations included within itself.

What is specifically interesting for Cavaillès in Bolzano's works is that he makes a critic of science, i.e. he fathoms what constitutes science as science and what the driving force behind science is. The main point is that the big merit of Bolzano consists in considering for the first time science as science, separating himself at first from Kant (who subordinates science to conscience and defines science starting from conscience), and then from Brunschvicg (who defines science as the starting point between the experience and the world).[32] The science, free from this double subordination, can finally emerge through its autonomy and independence and it can be defined as itself:

> For the first time, perhaps, science is not considered as a mere intermediary between the human mind [*esprit*] and the being in itself, depending on both of them and without a reality of its own, but it is considered as an object sui generis, getting an original essence and autonomy through its own movement. [33]

Science is a *sui generis object*, that can not be placed into universe of cultural objects because they inherently depend on their way to be produced and they are linked to the accidental exteriority of a sensible system. Furthermore science, unlike cultural objects, does not take form as a multiplicity of singular realisations: science is one and it demands this unity.

This extract from Cavaillès refers to a dissertation present in Bolzano's *Wissenschaftslehre* (1837), namely the distinction, on the one hand, between the sentences in themselves, the sentences of science, entities that have their own being independently from thought and statement and, on the other hand, the sentences expressed or thought. Consequently to this distinction, it follows the independence of science both from consciousness (and the thought propositions)[34] and from the world (and propositions stated)[35]. This independence and autonomy of science gives unity, which is shaped, first of all, as architecture: there are no different sciences anymore nor separated moments of a science, but one unique science shaped as unified, cohesive and organic. This unity of science does not mean that there is unity of principles or methods, but it means that the various disciplines interpenetrate, are connected, influence each other and interact, giving rise to science as a system, an architectural structure, a living organism. This unity implies interdependence between the various parts which partake in a unified whole. For this reason, "a theory of science can be nothing else than the theory of the unity of science".[36]

The unity of science is characterized as a necessary and indefinite progress[37], enclosed in itself, and its movement and dynamism:

[32] Cfr. (Cassou-Noguès 2001, p. 265).
[33] (Cavaillès 1947b, p. 503).
[34] (Cavaillès 1947b, p. 504).
[35] Cfr. (Cassou-Noguès 2001, p. 266).
[36] (Cavaillès 1947b, p. 504).
[37] Cfr. (Cavaillès 1947b, p. 506).

> This unity is movement: since it does not deal with a scientific ideal, but with concrete science, the incompleteness and the need for the progress are a fundamental part of the definition. Autonomous pure progress, dynamism in itself enclosed, without absolute beginning nor end, science moves out of the time – if time means reference to the experience of a consciousness.[38]

About this characterisation of science, Jean Sebestik defines Cavaillès as the dynamical side of the static universe of Bolzano,[39] which is able to answer to the difficulty consisting in how to determinate the relationship between science as a whole of out of time truths and actual science, historically realized. Sebestik precisely underlines that Cavaillès develops his conception of mathematical becoming, starting and basing it on Bolzano's theory. In fact, in this passage of *Sur la Logique et la théorie de la science*, Cavaillès not only proposes a mere reading of the science theory of Bolzano, but he also gives an original interpretation, where sometimes Bolzano's and Cavaillès's characterisation of science are mixed up. Furthermore, it is very difficult to establish, in this extract, which definitions of science are from Cavaillès or from Bolzano; it is also difficult to understand if some sentences are Cavaillès's interpretations of Bolzano's theories or if they are Cavaillès' original sentences founded on Bolzano's epistemology. To give an example: "The true meaning of a theory lies in its unending conceptual becoming, not in a particular and essentially provisional aspect".[40] In this sentence it plainly emerges that expressions as «dynamism», «autonomy», «indefinite progress» of science, etc..., are equally appropriate to the science theory of Bolzano as to Cavaillès' philosophical conception of the becoming of mathematics.

Anyhow, it is not necessary to distinguish between the thought of these two authors: what is really important in this excerpt is the praise that Cavaillès shows for Bolzano's epistemology, because he sets science free from the primacy of consciousness and from the world. Scientific experience consists in including the world in the scientific universe. The value of science is right in its necessity and so in its capacity to free itself from the empirical world (that is singularity, exteriority, heterogeneity) to unify science itself. Science organisation is independent from experience, that is autonomous and that Cavaillès metaphorically defines as a "Riemann volume, that can at the same time be closed and self-contained".[41] Even if Cavaillès appreciates Bolzano's epistemology so much, some difficulties arise. The first problem that emerges is the relationship between theory of science and science itself:

> Science doctrine is also a demand of intelligibility and of validity; it is a science of science, so it is a part of itself. So its statements cannot be essential to a particular development, but it has to directly appear in the self-illumination of the scientific movement. Statements differ from the scientific movement because of their continuous surfacing.[42]

Cavaillès can not accept a conception which assumes a sort of self illumination, a science transparency in itself: in this way, Bolzano falls into the same trap as Kant, when he puts the transparency in itself of the thought into the logic. Bolzano's theory of science is not a part of science among other parts, but, in a way, it is the essence of science, the immanent

[38](Cavaillès 1947b, p. 504).
[39]Cfr. (Sebestik 1997).
[40](Cavaillès 1947b, p. 505). It is not easy to correctly translate this passage, therefore I quote here the original text: «Le sens véritable d'une théorie est non pas dans un aspect compris par le savant lui-même comme essentiellement provisoire, mais dans un devenir conceptuel qui ne peut s'arrêter».
[41](Cavaillès 1947b, p. 506).
[42](Cavaillès 1947b, p. 506).

structure of the science chain, it is the structure that knows the chain in an immediate way, by self illumination. This theory of science on the one hand avoids the subservience, the dependence on the world, on the consciousness and on a historical being. But, on the other hand, if the becoming of science consists in a self-revealing process in the construction of the demonstration, the theory of science has to put down by itself the whole of what it produces.

Finally, in spite of the difficulties in Bolzano's epistemology, it is necessary to underline that Cavaillès, in this part of his work, deals with the main issue of his whole work: how to determinate de relationship between science as a set of out of time truths and historical science, actually achieved.[43]

3.3 The refusal of any foundational attempt

3.3.1 Formalism, logicism and intuitionism

In fact, all Cavaillès' research is specifically focused on the characteristics of mathematical progress, as an emblematical model of knowledge in general. According to Jean Cavaillès, mathematics is a singular becoming, irreducible to anything else but the mathematics, that originates from itself. At the bottom of this characterisation of mathematics there is the refusal of any foundational attempt, referring to external causes rather than to the dialectical movement inside mathematics itself.

In his main doctoral thesis, *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*,[44] Jean Cavaillès specifically deals with mathematical foundation's problem and analyses solutions proposed by formalism, logicism and intuitionism, coming to the conclusion that none of them can really solve this problem.

First of all, Cavaillès states the failure of the formalism's foundational project (at least of what he defines "Von Neumann's radical formalism").[45] According to Von Neumann, mathematics obtains its objective validity through its representation as a system or a collection of a system of signs, endowed with a meaning by its rules or structure and of deduction. In other words, mathematics is considered as a system of signs and rules to be employed, that governs the mechanical chain of formulas. The formalism's program consists in founding mathematics on a metamathematics that demonstrates the non-contradiction of formal systems. The Gödel theorem puts offside the formalist conception of mathematics, because it makes impossible to define mathematics as an hypothetical-deductive system. If it is impossible to bring a proof of non-contradiction evidence inside the system, the edifice collapses as "the notion of formal demonstration that gave to the system its only meaning is not yet able to be specified (because it is not possible to prove that everything is demonstrable in a formal system)".[46]

Therefore, Cavaillès takes into consideration logicism foundational attempt. First of all, he considers "logicism" as it was conceived by the Vienna Circle until 1929 and by Carnap. Cavaillès thinks that logicism is a sort of formalism's development and that the formalism's failure implies logicism failure too, even if the latter does not base mathematics on systems' internal non-contradiction, but on logical evidence. Logicism boundary, in Cavaillès' opinion, consists in being led by the same hidden realism that in Frege and Russell's view puts an "in itself" of the universe.[47] According to Cavaillès, logicism, can not solve the mathematical foundation problem.

[43]Cfr. (Sebestik 1997, p. 104).
[44](Cavaillès 1938c).
[45](Cavaillès 1938c, p. 172).
[46](Cavaillès 1938c, p. 173).
[47]Cfr. (Cavaillès 1938c, p. 177).

Finally, he focuses on the intuitionism, by pointing out the problem that emerges concerning the infinite subject. First of all, it is impossible to explain, by an intuitionist point of view, how infinite can be introduced in mathematics. Secondly, also in stating infinite in mathematics, the argument that brings to infinite must be explained and founded.

3.3.2 Psychological or social causality

Besides the fact that the mathematical movement can not be founded on these three approaches, it takes place in a total independence from any kind of social causality and from the pressure that the needs of other scientific domains exert. Cavaillès admits that in the contingent events' following it could happen that what he named the psychological or social causality phenomenon can delay or divert the mathematical course. However, despite this slowing down risk, it is impossible to stop this course, as it has a sort of internal drive in the direction of progress: The historical, contingent mathematician can stop himself, can be tired, but a problem's requirement imposes the act that will solve it'.[48] While presenting his doctoral thesis, his master of thesis, Brunschvicg complains about the fact that he ignored mathematical psychology, Cavaillès crisply answers that this problem was not what he had to consider and that he was not interested in this kind of issues.[49] What really mattered for him, were objective cores, relationships of intelligibility: the historical method can bring out this kind of issues. Cavaillès thinks that it is possible to perceive the internal unity in the central intuition from which the necessary mathematical chains proceed and we can discover it, methodically disclose it through the only description phenomena, as it happened in history. Therefore, there is a sort of virtuous circle that makes history come out of a theory unity and it is this unity that gives history its objectivity and justifies its function.

3.4 Mathematics is necessary and unforeseeable. How Cavaillès explains the paradox

So two fundamental issues of Cavaillès's thought emerge. On the one hand, he states that we can not separate the mathematical object from the concrete experience of its elaboration in the course of time, in a historical moment. In other words, mathematical progress depends on the operational act of the mathematician, which, at a specific time, elaborates a notion or defines a new mathematical object. On the other hand, mathematics can only be defined each time in the present, in the moment when a definition is given: at any time in history, giving a definition of mathematics that doesn't strictly concern this time is impossible, when the present moment is the achievement of the scientific progress. So mathematics is temporally and historically characterized and it is definable only in the present time. It can also be constantly re-defined, revisited and it is impossible to know *a priori* its final result. An everlasting definition of mathematics does not exist, and it is not possible to determinate what is true and what is false outside actual mathematics, in its historical context. Mathematicians, as human being, is irremediably involved in this adventure, he can not foresee its progress, mathematics is carried out by the scientific movement, in the time when every moment acquires its radical innovation.[50]

That is the way mathematics can, at the same time, be necessary but not predetermined: a becoming, in order to be an authentic becoming, has to be unforeseeable. Cavaillès underli-

[48](Cavaillès 1946a, p. 627).
[49]Letter of 28th April 1938, in (Ferrière 1950).
[50]Cfr. (Cavaillès 1946a, p. 594).

nes that this unforeseeability is not placed in the intuition of the "militant" mathematician. In fact, when he works, he obviously knows (or better, he can imagine) in what direction it is necessary to carry out his search: his operational act is not casual. Unforeseeability is instead placed in an original level, it is based on the foundation of mathematics: "It is what can be called the basic dialectics of mathematics: if new notions seem to be needed by given problems, this novelty itself is really an absolute novelty".[51] It seems that both necessity and unforeseeability are a paradox in their development, but we can explain this by characterising mathematical progress as an achievement through an experimental method, and not as the development of a logical demonstration.[52] The unforeseeability of mathematics can be really considered an absolute novelty if the peculiar way of the becoming of mathematics is considered as an operation that mathematicians do in an experimental context, working towards a discovery. Unforeseeability is not set into theories, as if it was a sort of unforeseeability of the mathematical operations: unforeseeability of the becoming of mathematics shows itself when a theory is overcome by dialectical movements. Unforeseeability is original, fundamental, placed at the heart of the becoming[53] and because of it, science gains its meaning: "The real meaning of a theory is not in what the scientist considers as a temporary step, but it is in an unstoppable conceptual becoming".[54]

4 Dialectics of becoming of science

The last issue that must be taken into account belongs to the determination of the dialectics of the becoming of science. "A doctrine of science could be provided not by a philosophy of science, but by a philosophy of the concept. The generating necessity is not that of an activity, but of dialectics"[55]: these words conclude Jean Cavaillès' *Sur la logique et la théorie de la science*, that could be considered as his philosophical will. Cavaillès did not have the time to deepen the philosophical meaning of the dialectics of concept, that he endorsed as a model for the elaboration of a correct theory of science, in opposition to the philosophies of knowledge. However, it is possible to reconstruct the gist of the dialectics of concept without misinterpreting Cavaillès' thought since the author left, scattered in his texts, various elements that can be detected and made coherent and systematic. Cavaillès' theory of science, being a philosophy of concept, is interpreted by most part of critics as a program rather than a thorough theory, as a need rather than as a doctrine.[56] Yet, the dialectics of concept is to be considered the gist of Cavaillès' philosophy of science, by means of which it is possible to tie together all its different aspects and, in particular, the history and the nature of the becoming of knowledge. Consequently, it is possible to elucidate the peculiar use of the notion of dialectics held by Cavaillès. In spite of its rare use, this notion has a deeper and more original meaning than it might appear at fist glance.[57] This is the interpretation given by Henri Mougin, who claims that:

[51](Cavaillès 1946a, p. 601).

[52]"This means that is impossible to find new notions into the demonstration, just analising already utilised notions: for example, [analizing] generalisations which have generated new processes" (Cavaillès 1946a, p. 601).

[53](Sinaceur 1994, p. 33).

[54](Cavaillès 1947b, p. 505).

[55](Cavaillès 1947b, p. 560).

[56]For instance, this view is endorsed by Schwartz (1998, p. 82); in (Sinaceur 1985, pp. 977-978): «Reading again the last lines of Cavaillès' «philosophical will», for the reader these lines are similar to an oasis, because they propose a program at least»; finally, in (Cassou-Noguès 2011, p. 312): «In my opinion, the last part of the text of the posthumous work it's quite a sketch, the outline of his plan and it's not really a task that is over».

[57]Cfr. (Dubarle 1948b, p. 359).

> The results of Cavaillès' reflection are all oriented towards the elaboration of this notion of dialectics [...]; the dialectics hides itself behind failures and requires, at every step, a positive and authentic effort towards a new experience. If I should sum up in a word the whole philosophical reflection of Cavaillès – after the remembrance of the friendly controversies [between Cavaillès and myself] –, I would say it essentially consists in a dialogue with the notion of dialectics, a dialogue that was already developed between 1933 and 1937, years during which the reflections on dialectics became fundamental; a dialogue that became even more intense after 1937.[58]

Cavaillès had already made use of the term 'dialectics' in his doctoral thesis both as a substantive and as an adjective referring to progress, movement and to the chain of concepts: "internal dialectics of the intuitive activity", "the dialectics of the history of mathematics", "the dialectic development of mathematics"[59], "dialectic generation of concepts" (referring to Cantor's works), "dialectic movement that generates the ∞"[60], "dialectic passage from a theory to a superior one", "dialectic development of the mathematical experience", "the creative dialectics", "the dialectic necessity"[61] "dialectic concatenation of concepts", "dialectic of concept", "dialectic moment of the position of object".[62] In all these different contexts, the term dialectics is always linked to the notions of necessity, of radical novelty or unexpectedness, of movement, progress, or concept.[63]

So, we can start considering the definition provided by Cavaillès in the article *Réflexions sur le fondement des mathématiques*: "Dialectics of the history of mathematics: liberation of the contingent by mean of the actual, but the actual in its becoming actual is contingent".[64] The importance of the notion of dialectics in Cavaillès consists especially in its dynamical essence: dialectics is movement. Indeed, being a process, the dialectics unfolds in time, and so in history and contingency. Notwithstanding this, this movement is not in turn contingent or arbitrary, because it allows the passage from a moment of becoming to another towards a sequence that happens necessarily. In fact, the dialectic movement starts from a contingent moment and, in its development, characterizes it as necessary, since the passage from a moment to another is pre-determined by the internal needs of the moments itself. To put it differently, the contingent moment is freed by the actual one because it loses its accidental nature when it gets tied to the following moment. However, this necessary correlation takes place in the historical present, and so, in the contingency. For this reason, the dialectic becoming of the history of mathematics is at the same time necessary and unforeseeable.

4.1 An example of dialectical becoming: thematization

It is possible to find an example of this in the actual mathematical experience and, for instance, in what Cavaillès calls "thematization". Thematization is, like paradigmatization, the process which allows to abstract and analyse the forms of demonstrations. In particular, thematization is a process of abstraction thanks to which an operation becomes in turn the basis of a superior one. Let us provide an example of how thematization works for Cavaillès.

[58](Mougin 1945, p. 75).
[59](Cavaillès 1937c, p. 578 and p.580).
[60](Cavaillès 1938b, p. 280 and p. 281).
[61]Cavaillès 1938c, pp. 180, 185, 190, 191).,
[62](Cavaillès 1946a, p. 601).
[63]Cfr. (Sinaceur 1994, p. 116).
[64](Cavaillès 1937c, p. 578).

Geometrical transformations, for instance rotation and translation, are gestures, operations in a broad sense, that apply to some points in the geometrical space. Thanks to thematization, the geometrical transformations become a field of objects and undergo a further operation, that is, composition. Composition provides to the geometrical transformations that Cavaillès calls "the group structure", that is, in other words, the composition of geometrical figures. Composition, thus, is an operation of superior degree than rotation and translation. In fact, composition is an operation that applies to geometrical transformations, assuming them as its own object.[65] According to Cavaillès, this passage has a dialectical nature:

> The development of conscience and the dialectical development of experience coincide, generating the indefinite set of objects in what we call a thematic field. [...] The necessity of generating an object can only be grasped by the observation of an outcome; the existence in the thematic field has sense in so far as it is correlated to a real act.[66]

The new objects are generated, but the necessary nature of their generation in the thematic field emerges a posteriori, that is to say, when the movement is done and has determined the existence of the objects: "At this point, an internal necessity compels the theory to overcome itself, by means of an unforeseeable development that reveals itself at the end of the process".[67] The development of the thematic field, that is, the generation of new objects, takes place by means of a real act, that is, the act of mathematical experience. This act is performed by a mathematician in flesh and blood, and the thematization, as a dialectical moment, occurs in the passage from a theory to another. Indeed, as Cavaillès specifies, it is impossible to know a priori the results of the necessary process of becoming of mathematics precisely because finding the solution to a problem is an authentic experience, and the solution itself assumes all the features of an experience. Being an experience, the search in the mathematical field is "a construction that eventually takes place in the sensible world and thus it is exposed to the risk of a possible failure, but it is performed according to a rule (that is to say, reproducible and so a non-event)".[68] To put it differently, all the discoveries in the mathematical field are possible because the mathematical experience, being an authentic experience, occurs in the sensible world. There is no abstract thought (or, better, no abstraction in thought) without a concrete act, there is no necessary becoming without starting from a contingent experience. As Cavaillès stresses:

> There is no really-thought representation (as distinctive of the pure experience) which, being truly thought – that is to say, organization of the sensible world according to rules (in virtue of the continuity of mathematical gestures, starting from the most elementary ones) – is not at the same time a mathematical system. The existence of objects is correlative to the actualization of a method and, thus, not categorical, but always depending on the fundamental experience of an actual thought.[69]

[65]Cfr. (Cassou-Noguès 2001, p. 146). Here we can find another example of thematisation, taken from *Remarques sur la théorie abstraite des ensambles*. When Cavaillès remarks on Dedekind's demonstration of an infinite system existance and when he analises the intuitive numeration, he asserts that thematisation is an operation into a theory, consisting in making a tought as an object of a thought, i.e. in making a multiplicity as an object similar to an unit.

[66](Cavaillès 1938c, p. 185).

[67](Cavaillès 1947b, p. 556).

[68](Cavaillès 1946a, p. 594).

[69](Cavaillès 1946a, pp. 594-595).

5 Conclusion. "The return to the origin is the return to the original"

Even the most abstract level, apparently far from the sensible experience, is in fact dialectically tied to its empirical basis, that is to say, to the moment when the mathematical research historically began. In this respect, Cavaillès claims this necessity to be a dialectical one, and not a formal one. In fact, Cavaillès maintains the perception of this necessary order to take place in the concrete, real, and temporal act, and, at the same time, to be all enlightened by its own conquest.[70] Even at the highest level of abstraction, the sensible basis is not to be neglected. In this way, it is possible to understand the fundamental role that Cavaillès appoints to the historical inquiry, which has to reconstruct the connection between the different moments of the process. As Cavaillès puts it in *Sur la logique et la théorie de la science*, "the return to the origin is the return to the original".[71] Looking at the past means giving a reconstruction of the different moments of the process on the basis of the dialectical moment rather than of the temporal succession. The return to the origin is not a mere inquiry on the historical starting point, but consists in grasping the moment when "the broadening of conscience and the dialectical development coincide",[72] which Cavaillès maintains to be the authentic origin of the necessary process of becoming. In this sense, "history reveals the authentic meanings, because allows to find the lost connections, firstly identifying automatisms and sedimentations, and then vivifying them through an immersion in a conscious actuality".[73] History is not a mere chronological reconstruction, but rather makes the original moments re-emerge and gives them a sense because of their re-actualization in the present. In other words, the original moments are such not merely in a temporal sense, but rather and foremost in an essential sense. The preceding moments are the necessary basis of the following ones both from a chronological and a dialectical point of view. The historical reconstruction becomes a reconstruction of the necessary connections because this necessity itself is not abstract from the world but rather it is anchored to the sensible universe and to the concrete experience which takes place in the historical temporality. As Cavaillès writes, "the time has a twofold necessity: that the immediate act becomes habitude and that the new act loads the system of the mute trails of the past, making use of them".[74] Time acquires the necessary feature of the dialectical movement, where present and past are complementary and justify themselves reciprocally in the unity of movement.

> There is no juxtaposition nor a set starting point: it is the entire body of mathematics that develops itself with a single movement, through different stages and forms – the latter, always as an entire body, achieves or not a certain cognitive function, through different stages and forms (technical devices included).[75]

Given this unity of mathematics, a correct historical inquiry should avoid fragmenting or even describing the becoming as divided into stages, but rather should make the complete dialectical unity of it emerge, and so bring into light the necessary connections and ties between the past, the preceding acquisitions and their actualization in the present. Mathematics is an authentic historical becoming and so it is irreducible and can be defined only

[70] Cfr. (Dubarle 1948b, p. 360).
[71] (Cavaillès 1947b, p. 558).
[72] (Cavaillès 1938c, p. 185).
[73] (Cavaillès 1947b, p. 558).
[74] (Cavaillès 1947b, p. 558).
[75] (Cavaillès 1947b, p. 556).

starting from itself: "the mathematical activity is an object of analysis and possess an essence, but as an odour or a sound, the mathematical activity is itself".[76] Mathematics does have an autonomous rational legitimacy which is historically connoted, that is to say, that concretely realizes its essence in subsequent stages. Thus, the comprehension of its becoming must involve a temporal analysis which should be able to connect the past with its actualization in the present:

> Impossibility to characterize the mathematical activity by reducing it to something else; [mathematics] is not only an intuition, but an original historical becoming. The starting objects are not whole numbers nor peculiar element of intuition, but are the result of concrete proceedings meant to organize the action of conscience in the world. The mathematical data is – in every moment of history – the system of objects the actual mathematics deals with.[77]

To conclude, the two essential features of the dialectical movement (necessity and unforeseeability) make the mathematical becoming an authentic becoming and characterize the fundamental dialectics of mathematics. Here, the new notions appear as necessitated by the given problem and this novelty itself is a real radical one.[78]

The history of mathematics is not properly a history but a process of re-emersion and re-actualization of its different moments. It is now possible to understand the apparently enigmatic statement that Cavaillès wrote in 1938, in its main doctoral thesis, *Méthode axiomatique et formalisme*: "There is nothing less historical [. . .] than the history of mathematics. But nothing less reducible, in its radical singularity".[79]

Ed.: translations by the author.

[76](Cavaillès 1949, p. 664).

[77](Cavaillès 1937c, p. 578).

[78]Cfr. (Cavaillès 1946a, p. 601). Cfr. also (Cavaillès 1947a, p.471-472): « The description of these historical reversals is well known. The result of these revearsals makes emerge the method and the whole system it rised: from the processes emerging from an internal solution of a problem need to create (in the same actualisation that gives sense to this need) a big change in the point of view, so that the notions that set up their structure have to be given up. But the relational links go beyond the empirical history: their dialectical movement assures at the same time the links' movement, and, through the links, it assures that the links themselves remain valid. History is characterized by the submission of the trascendental to its steps: the need of a passage emerges in a failure, the necessity of the progress emerges in the indetermination of the discovery. Necessity appears when it is all over».

[79](Cavaillès 1938c, p. 186).

References

Cavaillès' works on philosophy of science[80]

Works published when Cavaillès was alive

Cavaillès, J. (1929). 'Les deuxièmes cours universitaires de Davos', *Die II. Davoser Hochschulkurse*, 17, Davos, pp. 65-81; in P. Aubenque, 'Le débat de 1929 entre Cassirer et Heidegger' in J. Seindengart (Ed.) (1990). *Ernest Cassirer. De Mabourg à New York*, Paris, Cerfs, pp. 81-96.

Cavaillès, J. (1932a). Book review of G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, t. 114, pp. 437-444.

Cavaillès, J. (1932b). 'Sur la deuxième définition des ensembles finis donnée par Dedekind', *Fundamenta mathematica*, t. 19, pp. 143-148.

Cavaillès, J. (1934). Book review of D. Hilbert & P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik I*, *Recherches philosophiques*, t. 35, pp. 423-430.

Cavaillès, J. (1935a). Book review of L. Brunschvicg, *Les âges de l'intelligence*, *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, t. 119, pp. 403-406.

Cavaillès, J. (1935b). 'L'école de Vienne au congrès de Prague', *Revue de métaphysique et de morale*, t. 42, pp. 137-149 (Œ. C., pp. 565-576).

Cavaillès, J. (1936). Book review of A. Eddington, *Sur le problème du déterminisme*; P. Renaud, *Structure de la pensée et définitions expérimentales*; M. Fréchet, *L'arithmétique de l'infini*; A. Appert, *Propriétés des espaces abstraits les plus généraux*; N. Lusin, *Sur les suites stationnaires*; F. Enriques, *Signification de l'histoire de la pensée scientifique*; *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, t. 121, pp. 108-112.

Cavaillès, J. (1937a). 'Avertissement' in J. Cavaillès & E. Noether (Eds.). *Briefwechsel Cantor-Dedekind*, Paris, Hermann (Œ. C., pp. 377-383).

Cavaillès, J. (1937b). 'Logique mathématique et syllogisme', *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, t. 123, pp. 163-175 (Œ. C., pp. 581-592).

Cavaillès, J. (1937c). 'Réflexions sur le fondement des mathématiques', in *Travaux du IXe Congrès international de philosophie*, t. 6, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, n. 535, Paris, Hermann, pp. 136-139 (Œ. C., pp. 577-580).

Cavaillès, J. (1938a). Book review of A. Lautman, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques* and *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel*, *Revue de métaphysique et de morale*, t. 45, Supplement 2, pp. 9-11. [Anonymous book review, attributed to Cavaillès by H. Sinaceur (1987). 'Lettres inédites de Jean Cavaillès à Albert Lautman', *Revue d'histoire des sciences*, vol. 40, p. 121].

Cavaillès, J. (1938b). 'Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles',

[80] We utilise «in Œ. C.» to indicate the works collected in Cavaillès, J. (1994). *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, edited by B. Huisman, Paris, Hermann.

Actualités Scientifiques et Industrielles, n. 606 e 607, Paris, Hermann; republished in *Philosophie mathématique*, pp. 27-176 (Œ. C., pp. 223-374).

Cavaillès, J. (1938c). 'Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques', *Actualités Scientifiques et Industrielles*, n. 608, 609 e 610, Paris, Hermann; republished with a preface of H. Cartan, and an introduction of J.-T. Desanti (1981). Paris, Hermann (Œ. C., pp. 13-202).

Cavaillès, J. (1938d). 'Présentation de la collection' of *Essais philosophiques*, edited by R. Aron & J. Cavaillès, in A. Lautman, *Nouvelles recherches sur la structure dialectique des mathématiques*, Paris, Hermann.

Cavaillès, J. (1939). debate with F. Gonseth, 'Les conceptions modernes de la raison', *Actualités Scientifiques et Industrielles*, n. 850, Paris, Hermann, pp. 40-43.

Cavaillès, J. (1940). 'Du collectif au pari', *Revue de méthaphysique et de morale*, t. 47, pp. 139-163 (Œ. C., pp. 631-652).

Posthumous writings

Cavaillès, J. (1946a). 'La pensée mathématique' (lecture with A. Lautman at the Société française de Philosophie in February 1939). *Bulletin de la Société française de Philosophie*, t. 40, n. 1, pp. 1-39 (Œ. C., pp. 593-630).

Cavaillès, J. (1946b). 'La théorie de la science chez Bolzano' (excerpt from *Sur la logique et la théorie de la science*). *Deucalion*, n. 1, pp. 195-202 (Œ. C., p. 653-657).

Cavaillès, J. (1947a). *Transfini et continu*, Paris, Hermann; reprinted in *Philosophie mathématique*, pp. 255-274 (Œ. C., pp. 453-472).

Cavaillès, J. (1947b). *Sur la logique et la théorie de la science*, edited by G. Canguilhem & Ch. Ehresmann, with a presentation by the editors, Paris, PUF; 2nd edition 1960, with a preface of G. Bachelard, Paris, PUF; 3rd and 4th editions, 1976 and 1987, Paris, Vrin (4a edition in Œ. C., pp. 475-560); 5th edition 1997, with a postface and a bibliography of J. Sebestik, Paris, Vrin.

Cavaillès, J. (1949). 'Mathématiques et formalisme', edited by G. Canguilhem, *Revue internationale de philosophie*, t. 3, n. 8, pp. 3-9 (Œ. C., pp. 659-664).

Cavaillès, J. (1981). *Philosophie mathématique* (republication of *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles* and *Transfini et continu*, with a preface by R. Aron, an introduction by R. Martin and a translation by Ch. Ehresmann of *Correspondence Cantor-Dedekind*), Paris, Hermann.

Cavaillès, J. (1994). *Œuvres complètes de philosophie des sciences* (republication of *Méthode axiomatique et formalisme*, *Philosophie mathématique*, *Sur la logique et la théorie de la science*, *L'école de Vienne au congrès de Prague*, *Logique mathématique et syllogisme*, *Réflexions sur le fondement des mathématiques*, *La pensée mathématique*, *Du collectif au pari*, *La théorie de la science chez Bolzano*, *Mathématiques et formalisme* and *In memoriam* by G. Canguilhem), edited by B. Huisman, Paris, Hermann.

Main works on J. Cavaillès

AA.VV. (1985). *Jean Cavaillès: philosophe, résistant*, Colloque d'Amiens, septembre 1984, Centre régional de documentation pédagogique, Amiens.
Including:
Aubrac, L., *Jean Cavaillès: resistant*;
Ogliastro, J., *Jean Cavaillès: chef du réseau «Cohors»*;
Cartan, H., *Cavaillès et le fondament des mathématiques*;
Huisman, B., *Jean Cavaillès et la philosophie française de l'entre-deux guerres*;
Sinaceur, H., *L'épistemologie de Jean Cavaillès*;
Muglioni, J., *Colloque Jean Cavaillès*;
Cortois, P., *Bibliographie Jean Cavaillès*.

Aglan, A. & Azéma, J.-P. (2002). *Jean Cavaillès, résistant ou la Pensée en actes*, Paris, Flammarion.
Including:
Racine, N., *Les années des appentissage*;
Aglan, A., *La résistance*;
Verny, B., *La chute*;
Sinaceur, H., *Philosophie et histoire*;
Azema, J.-P., *Mémoires de Jean Cavaillès*.

Aubrac, L. (2003). 'Mon ami Jean Cavaillès', *La Lettre de la Fondation de la Résistence*, n. 34, pp. 6-7.

Bachelard, G. (1982). 'L'Œuvre de Jean Cavaillès', in G. Ferrière (Ed.), *Jean Cavaillès, un philosophe dans la guerre*, Paris, Seuil, pp. 235-248.

Blay, M. (1987). 'Mathèmatique et philosophie: Jean Cavaillès, Albert Lautman', *Revue d'histoire des sciences*, vol. 40, p. 3.

Bloch, O. (2002). 'Philosopher sous l'occupation', *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, n. 3 (July-September), pp. 259-260.

Campbell, R. (1952). 'Essai sur la philosophie des mathématiques selon Jean Cavaillès (I)', *Critique*, vol. 62 (July), pp. 1058-1069.

Campbell, R. (1953). 'Essai sur la philosophie des mathématiques selon Jean Cavaillès (II)', *Critique* , vol. 68 (January), pp. 48-66.

Canguilhem, G. (1984). *Vie et mort de Jean Cavaillès*, Paris, Allia.

Cartan, H. (1945). 'Jean Cavaillès, le philosophe mathématicien', *Bullettin de la Faculté des Lettres de Strasbourg*, vol. 24, n. 2, pp. 34-37.

Cassou-Noguès, P. (2001). *De l'expérience mathématique. Essai sur la philosophie des sciences de Jean Cavaillès*, Paris, Vrin.

Cassou-Noguès, P. (2006a). 'Jean Cavaillès, esperienza e storia', edited by A. Cavazzini & A. Gualandi, 'L'epistemologia francese e il problema del trascendentale storico', *Discipline* *filosofiche*, XVI, n. 2.

Cassou-Noguès, P. (2006b). 'Signs, figures and time: Cavaillès on "intuition" in mathematics', *Theoria*, vol. 55, pp. 89-104.

Cortois, P. (1994). 'Quelques aspects du programme épistémologique de Cavaillès', *Dialectica*, vol. 48 (2), pp. 125-141.

Cortois, P. (1996). 'The structure of Mathematical Experience According to Jean Cavaillès', *Philosophia mathematica*, vol. 4 (3), pp. 18-41.

Cortois, P. (1998). 'Bibliographie de Jean Cavaillès', *Philosophia Scientiae*, vol. 3 (1), pp. 157-174.

Dozou, L. (1998). 'Jean Cavaillès, un itinéraire hors du commun', *Philosophia Scientiae*, vol. 3 (1), pp. 139- 155.

Dubarle, D. (1948a). 'Le dernier écrit philosophique de Jean Cavaillès (I)', *Revue de métaphysique et de morale*, vol. 53, pp. 225-247.

Dubarle, D. (1948b). 'Le dernier écrit philosophique de Jean Cavaillès (II)', *Revue de métaphysique et de morale*, vol. 53, pp. 350-378.

Ferrières, G. (1950). *Jean Cavaillès, philosophe et combattant*, with a preface by G. Bachelard, Paris, PUF; 2nd edition (1982), *Jean Cavaillès, un philosophe dans la guerre*, Paris, Seuil.

George, F. (2003). 'Jean Cavaillès philosophe', *La Lettre de la Fondation de la Résistence*, n. 34, pp. 4-5.

Granger, G.-G. (1988). *Pour la connaissance philosophique*, Paris, Odile Jacob.

Granger, G.-G. (1998). 'Jean Cavaillès et l'histoire', *Philosophia Scientiae*, 3 (1), pp. 65-77.

Granger, G.-G. (2002). 'Cavaillès et Lautman, deux pionniers', *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, n. 3 (July-September). pp. 293- 301.

Granger, G.-G. (2006). 'Mathématiques et rationalité dans l'Œuvre de Jean Cavaillès', *L'Épistémologie française*, 1830-1970, edited by M. Bitbol & G. Gayon, Presses Universitaires de France, Paris, pp. 323-331.

Heinzmann, G. (1987). 'Le problème des fondaments en mathèmatique', *Revue d'histoire des sciences*, vol. 40, pp. 31-45.

Heinzman, G. (1998). 'La pensée mathematique en tant que constructive des realités nouvelles', *Philosophia Scientiae*, vol. 3 (1), pp. 99-111.

Hyder, D. (2003). 'Foucault, Cavaillès, and Husserl on the Historical Epistemology of the Sciences', *Perspective on Science*, vol. 11 (1), pp. 107-129.

Jané, I. (1994). 'J. Cavaillès, Método axiomàtico y formalismo' (books review). *History and Philosophy of Logic*, vol. 15 (1), pp. 143-144.

Michel, A. (1998). 'Après Jean Cavaillès, l'histoire des mathématiques', *Philosophia Scientiae*, vol. 3 (1), pp. 113- 117.

Monti Mondella, A. (1962). 'Filosofia e matematica nel pensiero di Jean Cavaillès', *Aut Aut*, n. 72 (November), pp. 523-536.

Mougin, H. (1945). 'Jean Cavaillès', *Pensée*, 1945, n. 4 (July-September), pp. 70-81.

Sebestik, J. (1997). Postface a *Sur la Logique et la théorie de la science*, Paris, Vrin, pp. 91-142.

Sinaceur, H. (1985). 'L'épistémologie de Jean Cavaillès', *Critique*, n. 461 (October), pp. 974-988.

Sinaceur, H. (1987a). 'L'épistémologie mathèmatique de Jean Cavaillès', *Revue d'histoire des sciences*, vol. 40, pp. 5-30.

Sinaceur, H. (1987b). 'Lettres inédites de Jean Cavaillès à Albert Lautman', *Revue d'histoire des sciences*, vol. 40, pp. 117-128.

Sinaceur, H. (1994). *Jean Cavaillès: philosophie mathématique*, Paris, Presses Universitaires de France.

Schwartz, E. (1998). 'Jean Cavaillès et la 'philosophie du concept", *Philosophia Scientiae*, vol. 3 (1), pp. 79-97.

Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 http://www.rifanalitica.it
Sponsored by *Società Italiana di Filosofia Analitica*

HILBERT, COMPLETENESS AND GEOMETRY

Giorgio Venturi

ABSTRACT. This paper aims to show how the mathematical content of Hilbert's Axiom of Completeness consists in an attempt to solve the more general problem of the relationship between intuition and formalization. Hilbert found the accordance between these two sides of mathematical knowledge at a logical level, clarifying the necessary and sufficient conditions for a good formalization of geometry. We will tackle the problem of what is, for Hilbert, the definition of geometry. The solution of this problem will bring out how Hilbert's conception of mathematics is not as innovative as his conception of the axiomatic method. The role that the demonstrative tools play in Hilbert's foundational reflections will also drive us to deal with the problem of the purity of methods, explicitly addressed by Hilbert. In this respect Hilbert's position is very innovative and deeply linked to his modern conception of the axiomatic method. In the end we will show that the role played by the Axiom of Completeness for geometry is the same as the Axiom of Induction for arithmetic and of Church-Turing thesis for computability theory. We end this paper arguing that set theory is the right context in which applying the axiomatic method to mathematics and we postpone to a sequel of this work the attempt to offer a solution similar to Hilbert's for the completeness of set theory.

KEYWORDS. Hilbert, Axiom of Completeness, Geometry, Axiomatic Method.

AUTHOR. Giorgio Venturi. gio.venturi@gmail.com
RECEIVED. 7th September 2011 **ACCEPTED**. 1st November 2011

1 The Axiom of Completeness

In 1899, after a series of lectures on geometry held at the University of Göttingen[1], Hilbert published a book not only fundamental for the subsequent development of geometry, but also for the way of thinking about and doing mathematics of the century that would shortly thereafter start: the "Foundations of Geometry" (*Grundlagen der Geometrie*)[2].

One of the most innovative aspects of this work is the way of thinking about and using the axiomatic method, which is no longer treated as a hypothetical-deductive method capable of proving theorems from true, self-evident, axioms. On the contrary Hilbert transformed it into a versatile method, useful to investigate the foundations of a science and building independence proofs among its axioms.

The system of axioms that Hilbert sets up in the *Grundlagen der Geometrie* is divided into five groups. In order: connection, order, parallels, congruence and continuity. We have two axioms of continuity: Archimedes's axiom and the Axiom of Completeness.

We now want to analyze the latter and try to understand what led Hilbert to formulate this axiom and why it occupies such an important role in the whole construction of the foundation of geometry.

> To the preceeding five groups of axioms, we may add the following one, which, although not of a purely geometrical nature, merits particular attention from a theoretical point of view[3].

Moreover Hilbert argues that the Axiom of Completeness "*forms the cornerstone of the entire system of axioms*"[4].

In the first German edition of 1899 there is no trace of the Axiom of Completeness. It appears from the second, in 1903, to the sixth, in 1923, in the following form:

> V.2 (Axiom der Vollständigkeit) Die Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) der Geometrie bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher genannten Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist, d.h.: zu dem System der Punkte, Geraden, Ebenen ist es nicht möglich, ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so dass in dem durch Zusammensetzung entstehenden System sämliche aufgeführten Axiome I-IV, V 1 erfüllt sind[5].

The axiom, however, appeared in print for the first time in the French edition, in 1900, in the following form.

> Au système de points, droites et plans, il est impossible d'adjoindre d'autres êtres de maniére que le système ainsi généralisé forme une nouvelle géométrie oé les axiomes des cinq groupes I-V soient tous vérifiés; en d'autres termes: les elèments

[1]See (Toepell 1986a) and (Hallet and Majer 2004), for a precise exposition of the origins of the *Grundlagen der Geometrie* and of the development of Hilbert's reflections on geometry in this early period.

[2]When referring and quoting it we will use (Hilbert 1899) to indicate the first German edition and (Hilbert 1900F) for the first French edition. Otherwise (Hilbert 1950) refers to the first English edition, translated from the second German edition (Hilbert 1903G), while (Hilbert 1971) indicates the second English edition, translated from the tenth German edition (Hilbert 1968). However, when quoting from (Hilbert 1971), we will point the German edition where the quote first appeared. Moreover, when quoting (Hilbert 1950), we will indicate if the quote can be found also in (Hilbert 1899).

[3](Hilbert 1950, p. 15).

[4](Hilbert 1971, p. 28); original emphasis. From the seventh German edition onward.

[5](Hilbert 1903G, p. 16).

> de la Géométrie forment un système d'êtres qui, si l'on conserve tous les axiomes, n'est susceptible d'aucune extension[6].

There is also an axiom of completeness for the axiomatization of real numbers in *Über den Zahlbegriff*, published in 1900.

> IV.2 (Axiom of Completeness) It is not possible to add to the system of numbers another system of things so that the axioms I, II, III, and IV 1 are also all satisfied in the combined system; in short, the numbers form a system of things which is incapable of being extended while continuing to satisfy all the axioms[7].

Furthermore, from the seventh edition onward the Completeness Axiom is replaced by a Linear Completeness Axiom, which in the context of the other axioms implies the Axiom of Completeness in the apparently more general form.

> V.2 (Axiom of Line Completeness) It is not possible to extend the system of points on a line with its order and congruence relations in such a way that the relations holding among the original elements as well as the fundamental properties of the line order and congruence following from Axioms I-III and from V.1 are preserved[8].

The literal translation of the Axiom of Completeness is the following.

> V.2 (Axiom of Completeness) The elements (points, straight lines, planes) of geometry form a system of things that, compatibly with the other axioms, can not be extended; i.e. it is not possible to add to the system of points, straight lines, planes another system of things in such a way that in the resulting system all the axioms I-IV, V.1 are satisfied.

In order to set about analyzing the content of this axiom, there are some terms that need to be clarified: Axiome, Dingen, Geometrie. The clarification of the concepts related to these terms will be used to explain Hilbert's axiomatic approach to the foundations of geometry and the central role that the Axiom of Completeness plays in this respect. We do not want to trace the history of these terms, but to investigate the role that these concept played in that historical context.

1.1 Axiome

It is easy to imagine that the concept of axiom in Hilbert's thought mirrors his use of the axiomatic method.

> The procedure of the axiomatic method, as it is expressed here, amounts to a *deepening of the foundations* of the individual do- mains of knowledge[9].

[6](Hilbert 1900F, p. 25).

[7](Hilbert 1900a, p. 1094) in (Ewald 1996). In German: *IV.2 (Axiom der Vollständigkeit) Es ist nicht möglich dem Systeme der Zahlen ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so dass auch in dem durch Zusammensetzung entstehenden Systeme bei Erhaltung der Beziehungen zwischen den Zahelen die Axiome I, II, III, IV.1 sämtlich erfüllt sind; oder kurz: die Zahlen bilden ein System von Dingen, wleches bei Aufrechterhaltung sämtlicher Beziehungen und sämtlicher aufgeführten Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist.*

[8]In (Hilbert 1971, p. 26).

[9](Hilbert 1918, p. 1109) in (Ewald 1996).

This *deepening of the foundations* amounts in an analysis of the basic principles of a theory that are formalized by means of axioms. The goal of the axiomatic method is to answers questions about why certain theorems can be proved with those principles and others can not[10]. But how it is possible to link axiomatic analysis and mathematical practice? In other words, where does the meaning of the axioms come from? In this first period of reflections on foundational issues[11], Hilbert seems to offer a point of view so far from a formalist conception of mathematics that it may be almost seen at odds with a modern approach.

> These axioms may be arranged in five groups. Each of these groups expresses, by itself, certain related fundamental facts of our intuition[12].

This quote is partly the result of an immature reflection on the sources of knowledge in geometry[13], but it also springs from a notion of intuition that is not the empirical intuition of space, as in the Euclidean formulation. Although recognizing the intuition of space as the starting point of any geometrical reflection, Hilbert maintains that it is not the ultimate source of meaning and truth of geometrical propositions. A different notion of intuition leads Hilbert to argue that the analysis of the foundations of geometry consists of "a rigorous axiomatic investigation of their [of the geometrical signs] conceptual content"[14]. As a matter of fact Hilbert is explicit in recognizing that the axioms of geometry have different degrees of intuitiveness.

> *A general remark on the character of our axioms I-V* might be pertinent here. The axioms I-III [incidence, order, congruence] state very simple, one could even say, original facts; their validity in nature can easily be demonstrated through experiment. Against this, however, the validity of IV and V [parallels and continuity in the form of the Archimedean Axiom] is not so immediately clear. The experimental confirmation of these demands a greater number of experiments.[15].

Accordingly, Hilbert's notion of axiom, even if it is deeply linked with intuition, does not have the evident character that it had classically. We cannot find in Hilbert the substantial coincident between intuition and evidence, that in Euclid's conception of geometry was based on the notion of spatial intuition. In this modern formulation, axioms draw their meaning from a kind of intuition that we can define *contextual*. It is an intuition encoding the *modus operandi* that is obtained working in a field of research, in this case geometry.

We can find an antecedent of this kind of intuition in Klein's words:

> Mechanical experiences, such as we have in the manipulation of solid bodies, contribute to forming our ordinary metric intuition, while optical experiences with light-rays and shadows are responsible for the developement of a 'projective' intuition[16].

[10]In a letter to Frege, dated December 29th, 1899 (in (Frege 1980, pp. 38-39)) Hilbert wrote: *I wanted to make possible to understand and answer such questions as why the sum of the angles in a triangle is equal to two right angles ad how this fact is connected with the parallel axiom*.

[11]In the second period of Hilbert's foundational studies, whose beginning can be placed in the early twenties, with the beginning of the proof theory, we can see an evolution of the concept of axiom. Yet even in this second period, the label "formalist" does not match with his concept of mathematical practice. See (Venturi) in this respect.

[12](Hilbert 1950, p. 2). Also in (Hilbert 1899).

[13]For a detailed study of the origins and the early influences on Hilbert's conception of geometry see (Toepell 1986a), (Toepell 1986b) and (Toepell 2000).

[14](Hilbert 1900, p. 1101) in (Ewald 1996).

[15](Hilbert *1898-1899, p. 380) in (Hallet and Majer 2004).

[16]In (Klein 1897, p. 593).

However a different conception of the axiomatic method and of a formalistic treatment of mathematics[17] will lead Klein to a different approach to geometry. Indeed Klein's geometrical enquires and the Erlangen's Programme will always presuppose an uncritical treatment of the intuitive data on the nature of space, contrary to the basic principle that aims Hilbert's axiomatic method. Indeed, while Klein will try to analyze and classify the different kind of spaces, Hilbert will deal with intuitions prior to the concept of space. We will come back later to this point, while explaining the different stages that Hilbert saw in the development of a science.

In the preface to the *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert is explicit in pointing out the requirements that a system of axioms must meet to be considered a good presentation of a theory.

> The following investigation is a new attempt to choose for geometry a *simple* and *complete* [*vollständiges*] set of *independent* axioms and to deduce from these the most important geometrical theorems in such a manner as to bring out as clearly as possible the significance [*Bedeutung*] of the different groups of axioms and the scope of the conclusions to be derived from the individual axioms. [18].

Here we see clearly that the meaning of the axioms is related to the technical tools they provide, as they are used in proving geometric theorems. This meaning is therefore intrinsic to the context of the theory.

Hilbert thus requires that a formal system be simple, complete and independent. We will consider later the meaning of completeness; however it is now useful to note that a certain idea of completeness is related to the requirement that the system of axioms should be able to prove *all* important geometrical theorems. Moreover, as shown by mathematical practice, the more the ideas are simple, the more they are deep and fundamental[19]. Finally, the demand for independence is for Hilbert a necessary condition for a good application of the axiomatic method. Indeed, for Hilbert the independence of a system of axioms is an index of the depth of the principles expressed by the axioms[20].

We still have to explain what accounts for the truth of the axioms. The answer to this question is clearly shown in a letter to Frege[21] in the form of the well-known equation that Hilbert saw between coherence, truth and existence.

Once shown that the criterion of existence is identified with that of consistency, we still need to clarify what in Hilbert's view exists and how.

[17]On this subject see (Torretti 1984).

[18](Hilbert 1950, p. 1). Also in (Hilbert 1899).

[19]We will not discuss here the problem of simplicity, although it is partially linked to that of purity of the methods we will address later. In the *Mathematische Notizbücher* (Hilbert *1891) Hilbert writes: *The 24th problem in my Paris lecture was to be: Criteria of simplicity, or proof of the greatest simplicity of certain proofs. Develop a theory of the method of proof in mathematics in general. Under a given set of conditions there can be but one simplest proof. Quite generally, if there are two proofs for a theorem, you must keep going until you have derived each from the other, or until it becomes quite evident what variant conditions (and aids) have been used in the two proofs. Given two routes, it is not right to take either of these two or to look for a third; it is necessary to investigate the area lying between the two routes*. As can be seen from this quote, the problem of simplicity is linked to what would be the development of Hilbert's proof theory; but this would lead us too far from the historical period we are examining. On this subject see (Thiele 2003).

[20]Notice however that the system of axioms proposed by Hilbert was not entirely independent. A truly independent system of axioms for geometry, but not categorical, will be proposed in 1904 by Oscar Veblen in (Veblen 1904).

[21]Letter from Hilbert to Frege December 29th, 1899; in (Frege 1980).

1.2 Dingen

For Hilbert, the existence of mathematical entities is intimately linked to the axioms of a specific formal system. Hilbert considers the axioms as *implicit definitions* of mathematical objects.

> The axioms so set up are at the same time the definitions of those elementary ideas[22].

The idea behind this position is a clear distinction between formal theory and intuitive theory. The latter refers to any mathematical field of research that features only one subject of enquiry and homogeneous methods.

Hilbert is explicit in saying that the axiomatic method leads to a more general conceptual level.

> According to this point of view, the method of the axiomatic construction of a theory presents itself as the procedure of the mapping [*Abbildung*] of a domain of knowledge onto a framework of concepts, which is carried out in such a way that to the objects of the domain of knowledge there now correspond the concepts, and to statements about the objects there correspond the logical relations between the concepts[23].

It is important here to stress that for Hilbert the mathematical objects defined by the axioms of the *Grundlagen der Geometrie* are not strictly speaking geometrical objects but conceptual entities that can be interpreted as geometrical objects. The intended interpretation is of course that of geometry, but this does not narrow the range of possible interpretations that can be give to formulas that constitute the formal system.

We then can see three distinct levels of things: 1) empirical entities 2) formal objects 3) elementary ideas. This distinction mirrors the evolutive steps of a theory that we will see in the next paragraph.

This distinction explains the Kantian exergue that Hilbert places at the beginning of the *Grundlagen der Geometrie*: *All human knowledge begins with intuitions, thence passes to concepts and ends with ideas*[24].

One of the main problem of a formal treatment of a theory is to explain why the axiomatic system so constructed should be a good formalization of the intended intuitive theory. This is the content of an objection raised by Frege.

> Your system of definitions is like a system of equations with several unknowns, where there remains a doubt whether the equations are soluble and, especially, whether the unknown quantities are uniquely determined. If they were uniquely determined, it would be better to give the solutions, i.e. to explain each of the expressions 'point', 'line', 'between' individually through something that was already known. Given your definitions, I do not know how to decide the question whether my pocket watch is a point. The very first axiom deals with two points; thus if I wanted to know whether it held for my watch, I should first have to know of some other object that is was a point. But even if I knew this, e.g. of my penholder, I still

[22](Hilbert 1900, p. 1104) in (Ewald 1996).
[23](Hilbert *1921-1922, p. 3). Translation in (Hallet 2008).
[24](Hilbert 1950). Also in (Hilbert 1899).

> could not decide whether my watch and my penholder determined a line, because I would not know what a line was[25].

The objection is justified on the basis of Frege's studies on the foundations of geometry. Indeed, he acknowledged that the axioms were self-evident propositions and that geometrical objects were abstractions of empirical objects. Frege's critic, however, is easily rebutted by Hilbert[26]. In fact he argues that that was exactly the strength of his method: to establish a formal system able to define an abstract concept, which would respond only to the requirements imposed by the axioms.

> This is apparently where the cardinal point of the misunderstanding lies. I do not want to assume anything as known in advance; I regard my explanation in sec. 1 as the definition of the concepts point, line, plane - if one ads again all the axioms of groups I to V as characteristic marks. If one is looking for another definitions of a 'point', e.g. through paraphrase in terms of extensionless, etc., then I must indeed oppose such attempts in the most decisive way; one is looking for something one can never find because there is nothing there[27].

The problem with Hilbert's reply is that it just points out a distinction of levels but does not give an explanation to the problem implicit in Frege's objection. We will call it Frege's problem and we formulate it as follows: why is the axiomatic system presented by Hilbert in the *Grundlagen der Geometrie* to be considered an axiomatization of geometry? In other words, if the axioms formalize the fundamental ideas of a theory and they are what allow the most important geometrical facts to be proved, what are the criteria that allow to identify the class of theorems we are interested in axiomatizing as theorems of geometry? And finally: in Hilbert's view, what is the definition of geometry once the axiomatic method has cut off the link between formalization and spatial intuition?

2 Completeness

In order to understand the meaning of the Axiom of Completeness we promised to explain the meaning of the terms involved. However, the main thesis of this paper is that it is not possible to understand what Hilbert's conception of geometry was without explaining the role that the Axiom of Completeness has in the process of its axiomatization.

If we undertake the difficult task of clarifying the ideas of an author far from us in time, and in the progress of the discipline he contributed to, some methodological precautions are necessary. First of all we must avoid the use of contemporary conceptual results in anachronistic contexts. As a matter of fact, understanding the genesis of concepts means going back to the time when those ideas were not clear, not completely understood. For this reason an historical analysis of this kind, even when it is precise and competent, risks obscuring not only the intentions of those who went through that experience, but the scope and extent of the ideas that are investigated. So, the analysis we would like to pursue here aims to contextualize the choices made by Hilbert as regards foundations of geometry, without altering

[25] Letter from Frege to Hilbert January 6th, 1900; in (Frege 1980, p. 45).

[26] Or at least this is what Hilbert would have answered, because he chose not to replay. Anyway next quote is from the letter just before the one just quoted; and we can assume that if Hilbert did not wrote Frege back is because he had already made his point.

[27] Letter from Hilbert to Frege December 29th, 1899; in (Frege 1980, p. 39).

the originality of those ideas. We therefore propose to go to the root of the problems that Hilbert addressed, trying to understand the mathematical choices and also to unravel the philosophical ideas that moved them.

We assume as our methodological stance that concepts do not proceed in a straight line of reasoning, but they get more and more clear once they are used in solving problems. In this way, ideas and conceptions at first vague are modeled on solutions given to problems. These concepts then become indispensable tools for the discipline that uses them, so that they cannot be disregarded if we want to understand a certain matter completely. In the exact sciences the historical process is easily mystified in two forms: firstly, a retrospective look tends to discover a linear progression of knowledge, and secondly the narrative of a discipline often proceeds in the opposite direction to the one that led to its formation.

In the case under discussion here it is interesting to see how this idea of completeness, which is still vague in Hilbert's discussions, and for this reason so fruitful, contained both the synthesis and the difficulty of concepts that a few decades after played a crucial role in studies of logic and beyond.

2.1 Completeness of the axioms

Coming back to the concept of geometry, in the lectures on projective geometry in 1891, Hilbert divides geometry in three parts:

> The divisions of geometry.
>
> 1. Intuitive geometry.
> 2. Axioms of geometry.
>   (investigates which axioms are used in the established facts in intuitive geometry and confronts these systematically with geometries in which some of these axioms are dropped)
> 3. Analytical geometry.
>   (in which from the outset a number is ascribed to the points in a line and thus reduces geometry to analysis)[28].

There is here an important distinction: the one between geometry and geometries. It is also possible to find this distinction in the *Grundlagen der Geometrie*, but for orthographic reasons it can be found only in the French version of 1900, where in the statement of the Axiom of Completeness we can find the distinction between *Géométrie* and *géométrie* The presence of new additions and comments indicates that Hilbert followed closely the editing of this translation[29]. From now on, with Geometry we mean the intuitive theory that is the object of formalization in the *Grundlagen der Geometrie*.

Hilbert's emphasis on analytic geometry stems from its importance in geometrical investigations at that time, as, for example, in Klein's representations of geometries as groups of transformations over manifolds. However, Hilbert's goal is not analyze the nature of space, as Klein did, but to make an axiomatic inquire of our geometrical intuitions. These intuitions are prior to the concept of space and hence they cannot presuppose anything about it. Indeed few years later Hilbert sharpens his reflections on the general concept of a mathematical theory and he says that

[28](Hilbert *1891, p. 3).

[29]In the volume (Hallet and Majer 2004) there is a careful account of the editorial vicisitudes of the French translation.

> Usually, in the story of a mathematical theory we can easily and clearly distinguish three stages of development: naïve, formal and critical[30].

Then, for geometry, Hilbert's task is to analyze critically the continuity assumption hidden in the intuition of space.

In (Hilbert 1903), Hilbert too contributed to the clarification of the nature of the space, assuming continuity since the beginning. However, since a foundation and not just a classification was sought in the *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert sees his work as a contribution to the *kritische* stage of the development of geometry. Thus, following the basic principle of the axiomatic method of deepening the foundations, Hilbert tries to elucidates the more fundamental principles of Geometry.

Here is outlined one of the most difficult tasks of Hilbert's axiomatization of Geometry: to find a system of axioms able to formalize all the means, also analytical, used in geometrical proofs. Linked to these problems, there are considerations on the purity of method, but we will face them later. Here it is sufficient to say that Hilbert is not concerned with problems of uniformity of methods of proofs[31].

In the same lectures on projective geometry we can find the following sentence, which still suffers from a conception that shortly thereafter would be radically changed.

> Geometry is the theory about the properties of space[32].

However, in Hilbert's lectures for the summer semester, in 1984, entitled *Die Grundlagen der Geometrie* there is no longer an explicit definition of geometry, but rather of geometrical facts. It is also worth noting that in the 1899 *Grundlagen der Geometrie* we do not find a definition of space.

> Among the phenomena, or facts of experience that we take into account observing nature, there is a particular group, namely the group of those facts which determine the external form of things. Geometry concerns itself with these facts[33].

Here there is a subtle, but basic, shift in addressing the problem of a foundation for geometry. Hilbert is not trying to define what Geometry is by means of the axioms, on the contrary he just tries to find a simple, independent and consistent system of axioms that allows a formalization of all geometrical facts. The completeness of the axioms to which Hilbert refers at the beginning of the *Grundlagen der Geometrie* has therefore to be understood in the sense of maximizing the class of geometrical facts that can be proved thanks to the proposed system of axioms.

In 1894, Hilbert was explicit in describing the goals he wanted to achieve by means of his foundational studies.

> Our colleague's problem is this: what are the *necessary* and *sufficient*[34] conditions, independent of each other, which one must posit for a system of things, so that

[30] In (Hilbert 1903a, p. 383) in (Hilbert 1970b). In German: *In der Geschichte einer mathematischen Theorie lassen sich meist 3 Entwicklungsperioden leicht und deutlich unterscheiden: Die naive, die formale und die kritische.* My translation.

[31] This is a concern typical of a classical conception of the axiomatic method that dates back to Aristotele: "[...] we cannot in demonstrating pass from one genus to another. We cannot, for instance, prove geometrical truths by arithmetic" (Posterior Analytics: 75a29-75b12). For an historical survey of this subject see (Detlefsen 2008).

[32] (Hilbert *1891, p. 5).

[33] (Hilbert *1894, p. 7).

[34] My emphasis.

> every property of these things corresponds to a geometrical fact and vice versa, so that by means of such a system of things a complete description and ordering of all geometrical facts is possible[35].

Hilbert's statement of intent is clear: find necessary and sufficient conditions to describe every geometrical fact. Then the problem of defining geometry disappears, since it is implicitly and extensionally defined by geometrical facts. This is precisely the purpose of an analysis conducted with the axiomatic method. As a matter of fact, in 1902, Hilbert says:

> I understand under the axiomatical exploration of a mathematical truth [or theorem] an investigation which does not aim at finding new or more general theorems being connected with this truth, but to determine the position of this theorem within the system of known truths in such a way that it can be clearly said which conditions are necessary and suffcient for giving a foundation of this truth[36].

Thanks to this precise statement, we can make some general consideration on the axiomatic method. First of all, this method is primarily designed to formalize an already developed field of knowledge. Therefore it is a method that can be applied when a science has already reached a sufficient level of maturity, such that it can be divided from other branches of knowledge. Then it is possible to develop an intuition internal to the theory capable of identifying the class of facts that have to be axiomatized, together with the basic principles that allow their proofs. Moreover, it should be noted that Hilbert says explicitly that the goal of the axiomatic method is a clear understanding of geometrical proofs, thanks to the analysis of the *meaning* of the axioms[37], and not the discovery of new theorems.

Besides, Hilbert does not consider the axiomatic method primarily as a source of mathematical rigor, capable of giving an epistemological foundation for mathematical knowledge[38], but rather as a tool which allows us to answer why some proofs are possible and some others are not.

One of Hilbert's greatest achievements in the field of the foundational studies has been to recognize not only the distinction of levels between theory and metatheory, but also to understand that the metatheory was analyzable with mathematical tools. However, Hilbert considered meta-mathematical investigation as a deepening of knowledge about mathematics, and not as a genuine source of new results; contrary to his subsequent work and what the development of twentieth-century logic would show[39].

In 1908, Hilbert still express opinions similar to those of 1902.

> In the case of modern mathematical investigations, ... I remember the investiga tions into the foundations of geometry, of arithmetic, and of set theory-they are concerned not so much with proving a particular fact or establishing the correctness of a particular proposition, but rather much more with carrying through the proof of a proposition with restriction to particular means or with demonstrating the impossibility of such a proof[40].

[35](Hilbert *1894, p. 8).

[36](Hilbert 1902-1903, p. 50).

[37]Recall the quote from the introduction of the *Grundlagen der Geometrie* (p. 1), where Hilbert declares that the aim of the book is "*to bring out as clearly as possible the significance [*Bedeutung*] of the different groups of axioms*".

[38]See (Ogawa 2004) in this respect.

[39]Following this line of reasoning it is perhaps reasonable to find an explanation for Hilbert's mild reaction to Gödel's incompleteness theorems. However, the quotes above are from the first period of Hilbert's interest on foundational issues i.e. before the twenties; while Gödel's theorems where proved in 1930.

[40](Hilbert 1909, p. 72). Translation in (Ogawa 2004, p. 100).

If the main point in axiomatizing Geometry is the axiomatization of all geometrical facts, what distinguishes them from other facts, whether empirical or mathematical? Hilbert answers this question clearly, but he is not clear on what motivates his choice; and it is on this terrain that Frege's problem regains strength.

2.2 Axiom der Vollständigkeit

Hilbert's aim is to find necessary and sufficient conditions to prove all relevant geometrical fact. So it is possible to define Geometry as the field of knowledge whose true propositions are the theorems that can be proved by means of the axioms presented in the *Grundlagen der Geometrie*.

As we saw in the last paragraph Hilbert's critical investigation of our geometrical intuitions should also take care of the continuity principles that are deeply linked with our intuition of space. This partially explains Hilbert's attention to analytical geometry. Judson Webb, in (Webb 1980), suggests that Hilbert's goal was to free Geometry from analytical considerations, in order to restore its dignity and autonomy. However, more than historical or methodological observations, there is also another reason that led Hilbert to deal with analytic geometry and in particular with analysis.

Hilbert talks explicitly of the "introduction of the number [*Einführung der Zahl*]", within Geometry, and its goal seems to be the arithmetization[41] of Geometry in the axiomatic context. Moreover, following his concept of axioms, as revealing their meaning in the demonstrative use, Hilbert's aim was to formalize analytical tools by means of geometrical axioms.

As a matter of fact, logic and analysis always play an important role in Hilbert's foundational work. In 1922, Hilbert expresses this view in these terms:

> This circumstance corresponds to a conviction I have long maintained, namely, that a simultaneous construction of arithmetic and formal logic is necessary because of the close connection and inseparability of arithmetical and logical truth[42].

The foundational view proposed here by Hilbert is radically different from the standard one that tries to ground all mathematical knowledge on a single concept. This is what Frege and Russell tried to do with logic; or how a set theoretical, functional or categorical foundation of mathematics is interpreted in modern times. Rather Hilbert was convinced that the tools offered by logic and arithmetic were essential for a proper development of any branch of mathematics. In other words, Hilbert does not seem to have any ontological or epistemological commitments in using numbers and logic; rather it is a methodological concern[43].

> In all exact sciences we gain accurate results only if we introduce the concept of number[44].

However, according to Hilbert these tools must be investigated in a critical manner.

> But if science is not to fall into a bare formalism, in a later stage of its development it has to come back and reflect on itself, and at least verify the basis upon which it

[41]By arithmetic Hilbert means analysis and in this sense we use the expression "arithmetization of geometry".

[42](Hilbert 1922, pp. 1131-1132) in (Ewald 1996).

[43]This is why it is not easy to attribute any philosophical position to Hilbert, although the problems he addresses have obvious philosophical implications.

[44](Hilbert *1894). In German: *In allen exakten Wissenschaften gewinnt man erst dann präzise Resultate wenn die Zahl eingefuhrt ist.* , in (Hallet and Majer 2004, p. 194).

has come to introduce the concept of number[45].

In order to introduce the concept of number in Geometry, Hilbert defines a calculus of segments and then he uses the axiomatic method to show which algebraic properties of the calculus follow from the validity of geometrical propositions.

Here the axiomatic method is used with the aim of understanding the demonstrative role of the axioms of Geometry. The idea is to generate a coordinate system internal to Geometry, showing that some fundamental theorems implie certain properties of numbers that are used as coordinates. In this way, the system of real numbers is not imposed from outside, as in analytic geometry, but arises from geometrical argumentation.

For example, the validity of Pappus's theorem (called Pascal's theorem by Hilbert) is used to show that the multiplication that it is possible to define on the coordinate system must necessarily be commutative. Thanks to axioms I-V1 Hilbert shows that the coordinate system thus defined forms an Archimedean field. However, since this Archimedean field can be countable, it is clear to Hilbert that the geometry that satisfies all axioms I-V1 can not be immediately identified with analytic geometry.

Indeed, the domain of the latter is uncountable, because it makes use of all real numbers. So, Hilbert's major concern is to define axiomatically a bijection between the points of a straight line and the real numbers. The solution of this problem is precisely the mathematical content of the Axiom of Completeness

> If in a geometry only the validity of the Archimedean Axiom is assumed, then it is possible to extend the set of points, lines, and planes by "*irrational*" elements so that in the resulting geometry on every line a point corresponds, without exception, to every set of three real numbers that satisfy the equation. By suitable interpretations it is possible to infer at the same time that *all* Axioms I-V are valid in the extended geometry. Thus extended geometry (by the adjunction if irrational elements) is none other than the ordinary space Cartesian geometry in which the completeness axiom V.2 also holds[46]

In this quotation it is possible to see how the Axiom of Completeness is used to fill that gap between Hilbertian plane geometry and analytic geometry. The way to achieve this is by adding irrational elements to the coordinate system presented in the *Grundlagen der Geometrie*. As a matter of fact, the axiomatization of the real numbers is simultaneous with the introduction of the Axiom of Completeness for geometry[47].

The irrational elements are also called ideal elements, by Hilbert. However, he immediately makes it clear that the ideal character of these elements is only relative the specific presentation of the system[48].

---

[45](Hilbert *1898). In German: *Aber wenn die Wissenschaft nicht einem unfruchtbaren Formalismus anheimfallen soll, so wird sie auf einem spateren Stadium der Entwickelung sich wieder auf sich selbst besinnen mussen und mindestens die Grundlagen prufen, auf denen sie zur Einfuhrung der Zahl gekommen ist*, in (Hallet and Majer 2004, p. 194). However, even in this mixture of geometry and analysis we need to be guided by intuition. In (Hilbert *1905, pp. 87-88), Hilbert says: *[O]ne should always be guided by intuition when laying things down axiomatically, and one always has intuition before oneself as a goal [*Zielpunkt*].* Translation in (Hallet 2008).

[46](Hilbert 1950, pp. 35-36).

[47]Remember that the Axiom of Completeness first appears in (Hilbert 1900a) and then in the first French edition of *Grundlagen der Geometrie*

[48]In (Hilbert *1919, p. 149), Hilbert says, *The terminology of ideal elements thus properly speaking only has its justification from the point of view of the system we start out from. In the new system we do not at all distinguish between actual and ideal elements*.

> That to every real number there corresponds a point of the straight line does not follow from our axioms. We can achieve this, however, by the introduction of ideal (irrational) points (Cantor's Axiom). It can be shown that these ideal points satisfy all the axioms I-V [...]. Their use is purely a matter of method: *first with their help is it possible to develop analytic geometry to its fullest extent* [49].

The reference to irrational elements echoes the problem of the purity of methods, which is explicitly mentioned by Hilbert. However Hilbert's solution is not to restrict the demonstrative tools, allowing just those conforming to the essential properties of the object of the theory. Indeed, the same idea of an extra-logical property of mathematical objects is contrary to the conception of axiomatic method, as Hilbert made clear also in correspondence with Frege.

> In fact, the geometric investigation carried out here seeks in general to cast light on the question of which axioms, assumptions or auxiliary means are necessary in the proof of a given elementary geometrical truth, and it is left up to discretionary judgement [*Ermessen*] in each individual case which method of proof is to be preferred, depending on the standpoint adopted[50].

Since its aim is to show the possibility or the impossibility of a proof, the axiomatic method is the highest expression of the search for the purity of methods. In an interlineated addition to the 1898/1899 lessons Hilbert writes: "Thus, solution of a problem impossible or impossible with certain means. With this is connected the demand for the purity of methods[51]". Hilbert considers the application of the axiomatic method as a precondition for any consideration on the purity of methods. Indeed, thanks to that it is possible to clear necessary conditions for the proof of a mathematical theorem. So, the choice of the demonstrative methods becomes a subjective question, since it does not depend on the nature of the problem.

> This basic principle, according to which one ought to elucidate the possibility of proofs, is very closely connected with the demand for the 'purity of method' of proof methods stressed by many modern mathematicians[52]. At root, this demand is nothing other than a subjective interpretation of the basic principle followed here.[53].

As a matter of fact Hilbert used analytic geometry to the full in the application of the axiomatic method to Geometry; for example in the proof that it is possible to develop a non-Deserguean geometry. This choice shows also that Hilbert's goal was not a foundation of analytic geometry in the contemporary sense, short of running into an obvious circularity in his reasoning.

In this context we can also explain how the axiomatic method can be used to improve our mathematical knowledge. Remember that Hilbert says: "I understand under the axiomatical

[49](Hilbert *1899, pp. 166-167).

[50](Hilbert 1950, pp. 82).

[51]See (Hilbert *1898-1899, p. 284) in (Hallet and Majer 2004).

[52]Remember that Hilbert's proofs were not easily accepted by the mathematical community of the late nineteenth century. Therefore, instead of restricting the methods of proof, Hilbert put forward an analysis of proofs that does not rest on external considerations on the nature of mathematical entities, but that aim to show if a demonstrative tool is necessary in a particular proof. Moreover, given the link between methods of proof and axioms, the justification of the means used in a proof is brought back to the justification of the axioms and to the inference rules. In 1925, in (Hilbert 1925), Hilbert writes: *If, apart from proving consistency, the question of the justification of a measure is to have any meaning, it can consist only in ascertaining whether the measure is accompanied by commensurate success.*

[53](Hilbert 1950, p. 82).

exploration of a mathematical truth [or theorem] an investigation which does not aim at finding new or more general theorems”[54].

> This basic principle [to enquire the main possibility of a proof] seems to me to contain a general and natural prescription. In fact, whenever in our mathematical work we encounter a problem or conjecture a theorem, our drive for knowledge [*Erkenntnistrieb*] is only then satisfied when we have succeeded in giving the complete solution of the problem and the rigorous proof of the theorem, or when we recognise clearly the grounds for the impossibility of success and thereby the necessity of the failure[55].

Therefore, we can clearly see in Hilbert’s thought a dichotomy between the subjective side of the demonstrative tools and the objective side of the the logical relations between concepts. However, the objectivity of mathematics is not needed to ground the mathematical discourse; indeed, this is done by means of a consistency proof. The emphasis given to the objectivity of mathematics is just a matter of justification of the methods of proof, hence of the axioms. We need to stress here the difference between giving a foundation or a justification. As a matter of fact, if we try to interpret Hilbert’s foundational efforts as a modern foundation for a mathematical theory, we see that we ran into an apparent circularity of the argumentation, because analytic geometry is used in order to show the necessity of the axioms that should give a foundation for analytic geometry. Then, this seems to support the autonomy of Hilbert’s foundation of mathematics[56]. But, this point of view is incorrect, since a foundation is sought where there is no foundation in the traditional sense. Hilbert does not try to find an epistemological explanation for mathematical arguments, or an ontological classification of mathematical entities, on a mathematical ground. On the contrary he tries to justify the possibility to give a formal treatment of an intuitive theory. Even if Hilbert avoids any extralogical commitments about objects and methods of proof, however the way he constructs the formal theory for Geometry is not autonomous from extra-mathematical considerations; we can say philosophical. Indeed Hilbert justifies the formalization of a theory appealing to intuition, logical reasoning and the concept of number. These concepts seem to be for Hilbert the starting points for any mathematical knowledge and construction. Appealing to these notions he is able to say that the axioms presented in the *Grundlagen der Geometrie* formalize precisely analytic geometry, in its intuitive character. This choice is indeed philosophical, because it implies a precise definition of mathematics: the science of calculation, carried out by logical means. This conception is quite astonishing if we think of the development of mathematics in the last century. However it explains the role of arithmetic in Hilbert’s conception of mathematics, throughout all his work; where arithmetic is here to be understood in the widest sense, including also transfinite cardinal arithmetic.

Recalling that Hilbert’s goal was to find necessary and sufficient conditions for proving the more relevant geometrical facts, we can affirm that the axioms of groups I-IV, together with Axiom of Archimedes, are necessary conditions for the development of analytic geometry, and the Axiom of Completeness plays the role of a sufficient condition to adapt the formal presentation given in the *Grundlagen der Geometrie* to the intuitive idea of a geometrical theory that makes use of the whole class of real numbers. Already in 1872 Cantor felt the need for an axiom to make compatible these two sides of geometry.

[54](Hilbert 1902-1903, p. 50).
[55](Hilbert 1950, p. 82).
[56]See for example (Franks 2009).

> In order to complete the connection [...] with the geometry of the straight line, one must only add an axiom which simply says that conversely every numerical quantity also has a determined point on the straight line, whose coordinate is equal to that quantity [...] I call this proposition an *axiom* because by its nature it cannot be universally proved. A certain objectivity is then subsequently gained thereby for the quantities although they are quite independent of this[57].

So we can distinguish two different kinds of axioms: the ones that are *necessary* for the development of a theory and the *sufficient* ones used to match intuition and formalization.

In the lectures that precede the first edition of the *Grundlagen der Geometrie* Hilbert proposed that continuity be formalized, in ways similar to Cantor's[58] and Dedekind's[59], which were able, together with the other axioms, to guarantee the existence of a bijection between the point lying on a straight line and the real numbers. However, Hilbert soon realized that there was need of less continuity for developing Geometry. Thus, following the general principle of the axiomatic method of pointing out the necessary conditions, Hilbert chose the Axiom of Archimedes. Indeed Hilbert's aim was to explain how and why geometrical proofs were possible, considering knowledge as knowledge of causes. In a letter to Frege, on December 29th 1899 (in (Frege 1980, pp. 38-39)), Hilbert wrote: "*It was of necessity that I had to set up my axiomatic system:* I wanted to make it possible to understand *those geometrical proposition that I regard as the most important results of geometrical inquiries*" (my emphasis).

> By the above treatment the requirement of continuity has been decomposed into two essentially different parts, namely into Archimedes' Axiom, whose role is to prepare the requirement of continuity, and the Completeness Axiom which *forms the cornerstone of the entire system of axioms*. The subsequent investigations rest essentially only on Archimedes' Axiom and the completeness axiom is in general not assumed[60].

Following this line of reasoning, the Axioms of Completeness can be seen as the first, historically documented, instance of Skolem's paradox; of course Hilbert was not driven by considerations on the nature of logic, but the Axiom of Completeness can be seen as a way of solving the problem of the existence of a theory for analytic geometry that cannot prove that real numbers are uncountable. As a matter of fact Hilbert seems to argue in favor of an intuitive connection with real numbers. Writing against the genetic method that tries to define real numbers, starting with natural numbers, Hilbert says:

> The totality of real numbers, i.e. the continuum [...] is not the totality of all possible series of decimal fractions, or of all possible laws according to which elements of a fundamental sequence may proceed. It is rather a system of things whose mutual relations are governed by the axioms set up and for which all propositions, and only those, are true which can be derived from the axioms by a finite number of logical processes[61].

[57]In (Cantor 1872, p. 128).

[58](Cantor continuity axiom): every descending (with respect to the relation of inclusion) sequence of non empty real intervals has no-empty intersection.

[59] (Dedekind continuity axiom): given any partition of the real line in two classes $A \leq B$ (i.e. $\forall a \in A$ and $\forall b \in B$, we have $a \leq b$) there is a real number c such that $a \leq c \leq b$, for every $a \in A$ and $b \in B$.

[60](Hilbert 1971, p. 28). From the seventh German edition onward

[61]In (Hilbert 1900, p. 1105) in (Ewald 1996).

In other words, this matching of intuition and formalization, which tries to harmonize the intuitions behind the system of real numbers and the real line, is the intuitive content of the fifth group of axioms of the *Grundlagen der Geometrie*.

In conclusion, Hilbert's analysis of the notion of continuity led him to formalize the Axiom of Completeness as a sufficient condition for analytic geometry, in the form of a *maximality* principle.

There are some presuppositions that need to be made explicit in Hilbert's ideas. First of all, the scope of the axiomatization needs to be known right from the beginning. Moreover, Hilbert chose to include analytical tools in the formalization of Geometry. This choice seems surprising if we consider that at that time the development of Geometry led to the introduction of very remote concepts, not only from classical geometry, but also from considering calculation as the most important tool in Geometry[62]. The answer to this problem may be Hilbert's conviction that "In all exact sciences we gain accurate results only if we introduce the concept of number[63]".

All this shows how important logic and arithmetic are for Hilbert. So, together with the fact that formalization needs to take care of demonstrative methods used in a certain field of knowledge, it explains how Hilbert's ideas developed to the proof theory.

3 Idea of completeness and contemporary axiomatics

Having explained what Hilbert means by completeness and what he was aiming for in placing it at the center of his axiomatic presentation of Geometry, we would like here to study how this idea developed after Hilbert.

We would like to say here that we do not want to explain how the notion of completeness became what we now call semantic completeness, syntactic completeness and categoricity[64]. On the contrary, we would like to see if the idea of a maximal axiom that tries to match intuition and formalization has been used in other contexts.

In the analysis of the foundations of Geometry, Hilbert faced the problem of finding a link between the subjective perception of mathematical reality and the objective character of mathematical truth. However, this link was not fully justified, because he never even try to address the problem of explaining the concept of Geometry. Hilbert's solution is satisfactory as far as the Axiom of Completeness, translated into a modern terminology -with second order logic-, implies the categoricity of the model. However, since it is possible to develop arithmetic in the system of the *Grundlagen der Geometrie*, by the first Gödel's incompleteness theorem, this system is deductively incomplete, with respect to first order logic. But for what concern the sense of completeness we used to explain the Axiom of Completeness, we can say that Hilbert did managed to build a complete system of axioms, i.e. capable to prove all relevant theorems of Euclidean geometry and to formalize all methods of proof used in it. Anyway at that time not only Gödel's results were lacking, but also a good formalization of logic, able to represet the logical tools used in formalizing Geometry.

There is a substantial link between the problem of matching intuition and formalization and the problem of a mathematical treatment of logic. Indeed whenever there is a need to formalize concepts that have intuitive roots, we have to reflect on whether reasoning on

[62] See (Hintikka 1997) for a detailed analysis of the importance of combinatorial aspects in Hilbert's thought.
[63] (Hilbert *1894).
[64] See (Awoday and Reck 2002) in this respect.

these concepts is really possibile; and at the border between subjectivity of judgements and objectivity of truths there is logic.

In this respect the Axiom of Completeness is used to delimit the scope of axiomatization and it witnesses an extra-logical relation with the subject matter of Geometry.

Hilbert's work can be seen as an instance of a more general procedure aiming to establish some necessary conditions for the development of a theory and to find a maximal principle as a sufficient condition for the formalization.

Another example, besides the case of geometry, is the formalization of the concept of computability. In this case the need for a principle capable for completing the theory is really important, since what is formalized is a meta-mathematical concept. In this context, the analogue of the Axiom of Completeness is Church-Turing thesis. It says that the class of functions defined by the λ-caluculus (equivalently of general recursive functions and of functions computable by a Turing machine[65]) is the class of all the functions that are intuitively computable. Then, since all these functions are intuitively computable, Church-Turing thesis is a sufficient condition that characterizes the class of computable functions. There seems to be an important difference between the Axiom of Completeness and Church-Turing thesis, since one is an axiom, but the other a thesis. However the difference is only apparent, because as far as their use in proofs in concerned both serve as a justification of the use of the other axioms. Indeed Hilbert says explicitly that the Axiom of Completeness is not used in his geometrical investigations; exactly as the Church-Turing thesis is not used in proving theorem of recursion theory, but just invoked to justify that all and only those functions are intuitively computable. Again we can see that Church-Turing thesis bridges the gap between the formalization of a concept and the our intuitive idea.

Another example of this kind is the formalization of the concept of natural number by means of the Peano-Dedekind axioms[66]. In this case the presentation is completed by the axiom of induction as a second order principle: given a non empty set M, an element $0 \in M$ and an injective function $S : M \to M$

$$\forall P \subseteq M\big(0 \in P \land \forall x(x \in P \to S(x) \in P) \to P = M\big).$$

This axiom says that every subset of M satisfying the axioms and closed under the successor function, must necessarily be the structure of natural numbers. In other words is not possible to extend the system of natural numbers with new objects and to get a new system of things that satisfies the Dedekind-Peano axioms, minus induction.

As in the case of the Axiom of Completeness we are here dealing with a method which, by using second order principles, fixes the structure intended to formalize an intuitive concept uniquely. As for Geometry, by means of these axioms we give a definition of natural number. It is interesting to note that in both situations the result is achieved through the identification of a property which formalizes the demonstrative power of a concept: continuity in the first case, induction in the second.

Therefore, it is interesting to ask whether this axiomatic notion is still relevant and how the progress of logic served to clarify this relationship between intuition and formalism.

---

[65]Indeed all these classes are provably the same.

[66]Besides the scheme for induction we have:

1. $\forall x(x \neq 0 \to \exists y(S(y) = x))$,
2. $\neg\exists x(S(x) = 0)$,
3. $\forall x, y(x \neq y \to S(x) \neq S(y))$.

4 The case of set theory

In the axiomatic context set theory plays a prominent role. This theory, in fact, was given a satisfactory axiomatization capable of formalizing almost all mathematics, and maintained and improved the ability to analyze up to a minimum the demonstrative tools used in mathematical practice, thanks to versatile methods for building independence proofs.

In the last century the development of mathematics and the invention of category theory have undermine the widespread idea that set theory could be the foundation of mathematics[67]. However if we confine to Hilbert's idea of foundation of a science as outlined in these pages -to apply the axiomatic method in order to find necessary and sufficient conditions- we can say that set theory provide fine tools to analyze the main possibility of proof of a theorem[68] and a unifying language where it is possible to pose any mathematical problem. Hence it is a good framework for applying Hilbert's axiomatic method to mathematics.

Indeed, set theory deals mainly with problems independent of ZFC, the classical first order formalization of the theory. However, the analysis of these problems does not end with their independence proofs, but seeks to identify which principles are needed for their proofs; as Hilbert did in the case of Geometry. As a consequence these principles often cannot hide their combinatorial origin.

Secondly, as the analysis of the concept of axiom has shown, for Hilbert the idea of completeness is related to the idea of exhaustiveness of the methods of proof. However, the incompleteness phenomenon arising from Gödel's theorems makes it always possible to extend these methods, although in such a way that it is possible to compare them by means of their consistency strength[69].

A further source of difficulty is the fact that set theory uses arguments that, even if formalized in first order logic, are substantially of higher order. For example, the axioms expressing the existence of large cardinals, while affirming the existence of sets with certain first order properties, imply the existence of a model for set theory, or of class-size objects. For this reason a reflection about the methods used in set theory should also take into account a meta-theoretical discussion of logic, not necessarily first order logic[70].

Moreover, if we try to formulate an axiom that makes set theory complete with respect to the intuitive idea of set, one collides with some conceptual difficulties. These are due to the fact that the very concept of set is a mental operation of reducing to unity a plurality of things. Therefore the "set of" operation cannot be limited to a fixed domain, without asking if this latter is itself a set. The history of the axiomatization of the concept of set is in fact a continuing attempt to impose the least restrictive limitations, in order to avoid an inconsistent system; as Russell's paradox showed for Frege's system.

However, even facing these inherent difficulties, the need for an axiom similar to Hilbert's Axiom of Completeness was historically felt quite early in the development of set theory.

[67]On this topic see MacLane's and Mathias's articles in (Judah, Just and Woodin 1992).

[68]This is also the aim of what is now called Reverse Mathematics, although its main focus are systems that leis in between RCA_0 and second order arithmetic. For this reason in Reverse Mathematics the axiomatic method is applied to theorems about countable structures. So, even if its analysis is finer, its scope is much smaller then that of set theory. See (Marcone 2009), and (Simpson 2009) for a presentation of aims and methods of Reverse Mathematics.

[69]We say that a theory T has consistency strength stronger than a theory S if in first order Peano arithmetic (i.e. the induction axiom is a scheme) it is possible to prove $con(T) \to con(S)$, where $con(T)$ is the sentence expressing the consistency of T. Surprisingly, and luckily, the theories that are the object of study are linearly ordered, with respect to consistency strength. This order is induced by the one existing among the axioms that postulate the existence of large cardinals. For an overview of this subject see (Kanamori 1994).

[70]For an historical presentation of this problem, see (Moore 1980).

In 1921 Fraenkel expressed this idea as follows:

> Zermelo's axiom system do not ensure any character of "categorical" uniqueness. For this reason there should be an "Axiom of Narrowness" similar, but opposite, to Hilbert's Axiom of Completeness, in order to impose the domain to be the smallest possible, compatibly with the other axioms. In this way we can eliminate those classes, existing in Zermelo's system, that are unnecessary for a mathematical purpose[71].

Once noticing that set theory is a good framework for applying the axiomatic method, as Hilbert conceived it, to mathematics, it would be interesting to inquire about the possibility of defining a notion of completeness able to capture some intrinsic aspect of set theory, within an axiomatic framework. In other words, in which way it makes sense to try to reconcile the idea of a complete theory with the phenomenon of incompleteness?

We defer the attempt to answer these questions to another work.

[71](Fraenkel 1921). In German: *Das Zermelosche Axiomensystem sichert dem Bereich keinen "kategoriscehn" Eindeutigkeitscharakter. Dazu ist ein weiteres, dem Hilbertschen Vollständigkeitsaxiom umgekehrt analoges "Beschränktheitsaxiom" erforderlich das dem Bereich den kleinsten mit den Axiomen verträglichen Umfang auferlegt. Hierdurch werden verschiedene, für mathematische Zwecke unnötige Klassen von Mengen ansageschieden , die im Zermeloschen System Platz haben.* My translation.

Bibliography

Awodey, S. and E. H. Reck (2002). Completeness and categoricity. Part I: nineteenth-century axiomatics to twentieth-century metalogic, *History and Philosophy of Logic* 23, 2002.

Cantor, G. (1872). Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trignometrischen Reihen, in *Mathematische Annalen*, 5, pp. 123-132.

Detlefsen, M. (2008). The purity of methods, in (Mancosu 2008).

Ewald, W. ed. (1996). *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics* Volume II, Clarendon Press, Oxford.

Ewald, W. and W. Sieg, (eds.) (2008). *David Hilbert's lectures on the foundations of logic and arithmetic, 1917-1933*, Springer, Berlin.

Ewald, W. Hallet, M. and W. Sieg, (eds.) *David Hilbert's lectures on the foundations of logic and arithmetic, 1894-1917*, Springer, Berlin. Forthcoming.

Fraenkel, A. (1921). Über die Zermelosche Begründung der Mengenlehre, abstract, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 30(2).

Franks, C. (2009). *The autonomy of mathematical knowledge: Hilbert's program revisited*, Cambridge University Press, Cambridge.

Frege, G. (1980). *Philosophical and mathematical correspondence*, Basil Blackwell, Oxford.

Hallet, M. (2008). Reflections on the purity of method in Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*", in (Mancosu 2008).

Hallet, M. and U. Majer, (eds.) (2004). *David Hilbert's lectures on the foundations of geometry, 1891-1902*, Springer, Berlin.

Hendricks, V. F. and al. (eds.) (2007). *Interactions. Mathematics, physics and philosophy, 1860-1930*, Springer, New York.

Hilbert, D. *Mathematische Notizbücher*, 3 notebooks, Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, Cod. Ms. D. Hilbert 600:1-3.

Hilbert, D. (*1891). Projektive Geometrie, lectures notes for a course held during the year 1891, in Könisberg. In (Hallet and Majer 2004) pp. 21-55.

Hilbert, D. (*1894). Die Grundlagen der Geometrie, lectures notes for a course held during the year 1894, in Könisberg. In (Hallet and Majer 2004), pp. 72-123.

Hilbert, D. (*1898). Feriencursus: Über den Begriff des Unendlichen, lectures notes for a course held during the years 1898, in Göttingen. In (Hallet and Majer 2004), pp. 160-178.

Hilbert, D. (*1898-1899). Grundlagen der Euklidischen Geometrie, lectures notes for a course held during the years 1898-1899, in Göttingen. In (Hallet and Majer 2004), pp. 221-286.

Hilbert, D. (*1899). Elemente der Euklidischen Geometrie, *Ausarbeitung* form (Hilbert *1898-1899). In (Hallet and Majer 2004), pp. 302-395.

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie* (*Festschrift*). In (Hallet and Majer 2004), pp. 436-525.

Hilbert, D. (1900F). *Les principes fondamentaux de la géométrie*, Gauthier-Villars, Paris, 1900.

Hilbert, D. (1900). Mathematishen Probleme, 1900. Translated as Mathematical problems in (Ewald 1996), pp. 1096-1105.

Hilbert, D. (1900a). Über den Zahlbegriff. Translated as On the concept of number in (Ewald 1996), pp. 1089-1095.

Hilbert, D. (1902-190303). Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, in *Proceedings of the London Mathematical Society*, 35, pp. 50-68.

Hilbert, D. (1903G). *Grundlagen der Geometrie*, Zweite, durch Zusätze vermehrte und mit fünf Anhängen versehene Auflage. Teubner, Leipzig.

Hilbert, D. (1903). Über die Grundlagen der Geometrie", *Mathematiche Annalen*, 56, pp. 381-422. Translated in English in (Hilbert 1971), p. 150-190.

Hilbert, D. (1903a). Über die Theorie der algebraischen Invarianten", Mathematical paper read at the international Mathematical Congress Chicago. Printed in (Hilbert 1970b), pp. 376-383.

Hilbert, D. (*1905). Logische Principien des mathematischen Denkens", lecture notes for a course held during the year 1905, in Göttingen. In (Ewald, Hallet and Sieg).

Hilbert, D. (1909). Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen. In (Hilbert 1970c).

Hilbert, D. (1918). Axiomatishes Denken. Translated as "Axiomatic thought", in (Ewald 1996), pp. 1105-1115.

Hilbert, D. (*1919). Natur und mathematisches Erkennen, lecture notes for a course held during the year 1919, in Göttingen. Published for the first time by David Rowe, in 1992.

Hilbert, D. (*1921-1922). Grundlagen der Mathematik, lecture notes for a course held during the academic year 1921-1922, in Göttingen. In (Ewald and Sieg 2008).

Hilbert, D. (1922). Neubegründung der Mathematik. Erste Mittelung. Translated as The new grounding of mathematics. First report, in (Ewald 1996), pp. 1117-1148.

Hilbert, D. (1925). Über das Unendliche. Translated as On the infinite, in (Ewald 1996).

Hilbert, D. (1950). *The Foundations of Geometry*, The Open Court Publishing Company, La

Salle. Translated from the 2^{nd} German edition.

Hilbert, D. (1968). *Grundlagen der Geometrie*. Mit Supplementen von Paul Bernays. 10. Auflage. Teubner, Stuttgart.

Hilbert, D. (1970b). *Gesammelte Abhandlungen II*, Springer.

Hilbert, D. (1970c). *Gesammelte Abhandlungen III*, Springer.

Hilbert, D. (1971). *Foundations of geometry*, (Second English ed.), La Salle: Open Court. Translated by the 10^{th} German edition.

Hintikka, J. (ed.) (1995). *From Dedekind to Gödel*, Synthese Library vol. 251.

Hintikka, J. (1997). Hilbert vindicated, *Synthese* 110.

Judah, H. Just, W. and W. H. Woodin (eds.) (1992). *Set theory and the continuum*, Springer, New York.

Kanamori, A. (1994). *The higher Infinite. Large cardinals in set theory from their beginnings*, Springer, Berlin.

Klein, F. (1897). Gutachen, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Verteilung des Lobatschewsky Preises, *Mathematichen Annalen*, 50, pp. 583-600.

Mancosu, P. (ed.) (2008). *The philosophy of mathematical practice*, Oxford University Press, Oxford.

Marcone, A. (2009). Equivalenze tra teoremi: il programma di ricerca della reverse mathematics, *La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista dell'Unione Matematica Italiana* 2, pp. 101-126.

Moore, G. H. (1980). Beyond first-order logic: the historical interplay between mathematical logic and axiomatic set theory, *History and Philosophy of Logic* 1.

Ogawa, Y. (2004). The Pursuit of Rigor: Hilbert's axiomatic method and the objectivity of mathematics, *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science* 12(2).

Shore, R. (2010). Reverse mathematics: the playground of logic, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 16, pp. 378-402.

Simpson, S. C. (2009). *Subsystems of second order arithmetic*, Cambridge University Press, Cambridge.

Thiele, R. (2003). Hilbert's Twenty-fourth problem, in *America Mathematical Monthly*, January.

Toepell, M. (1986a). *Über die Entstehung von David Hilberts "Grundlagen der Geometrie"*, Dissertation, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprech.

Toepell, M. (1986b). On the origins of David Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*, in *Archive* *for History of Exact Sciences*, 35(4).

Toepell, M. (2000). The origin and the further development of Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*, in *Le Matematiche*, LV(1).

Torretti, R. (1984). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré*, Springer, New York.

Veblen, O. (1904). A system of axioms for geometry, in *Transaction of the American mathematical society*, 5.

Venturi, G. The concept of axiom in Hilbert's thought, preprint.

Webb, J. C. (1980). *Mechanicism, mentalism and metamathematics*, Kluwer, Boston.

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

Il problema di Platone. Un'introduzione storica alla filosofia della matematica

Marco Panza e Andrea Sereni

[Carocci editore – Roma, 2010]

Pietro Angelo Casati

Per filosofia della matematica si intende la riflessione filosofica circa la natura e le finalità della matematica, nel suo duplice aspetto di scienza pura e di strumento interpretativo della realtà. Di cosa si occupa esattamente la matematica? Entità come numeri, insiemi, funzioni esistono davvero? E se sì, in che senso? Come fanno i matematici a conoscere questi oggetti? Com'è possibile che lo studio di oggetti astratti sia così utile per lo studio di oggetti concreti? Il tentativo di rispondere a queste domande caratterizza la riflessione sui principali problemi propri alla filosofia della matematica; questioni fra loro così strettamente connesse che è difficile capire come se ne possa affrontare una senza affrontare almeno in parte anche le altre.

Prendendo le mosse forse dal più classico di questi problemi, quello dell'ontologia della matematica, richiamato nel titolo come "il problema di Platone", il volume ripercorre le tappe storiche di una particolare opzione filosofica volta a risolverlo, il platonismo, fino a ricostruire a grandi linee il dibattito che si è sviluppato su di essa dagli anni sessanta del XX secolo, e che è tuttora in corso. Il termine "platonismo" si usa in filosofia della matematica per caratterizzare un particolare tipo di realismo, secondo cui gli asserti della matematica descrivono un dominio di oggetti astratti, che esistono indipendentemente dall'attività conoscitiva del matematico. La tesi alternativa al platonismo riguardo lo *status* ontologico degli enti matematici è il nominalismo, ovvero la negazione di qualunque impegno ontologico della matematica. Spesso i nominalisti ritengono che sia comunque possibile continuare a riferirsi ad oggetti matematici, purché sia chiaro che si tratta di un semplice espediente per parlare unicamente di oggetti concreti, una comoda *façon de parler*.

Il problema di Platone di Marco Panza e Andrea Sereni, edito da Carocci nella collana Frecce, è un'introduzione storica e ha tutti i pregi di questo tipo di impostazione: dopo una decina di pagine volte a richiamare al lettore alcune nozioni e distinzioni fondamentali (per esempio la distinzione tra oggetti concreti e astratti) i capitoli iniziali presentano una ricostruzione del problema a partire da Platone, Aristotele e Proclo per arrivare fino a Kant, fornendo così al lettore inesperto il *background* necessario per comprendere la rilevanza del dibattito contemporaneo.

Autore. Pietro Angelo Casati. pietroangelo.casati@gmail.com

Il modo di fare filosofia della matematica di Frege differisce da quello di Kant molto di più di quanto questo differisca da quelli di Platone, Aristotele e Proclo. Questa differenza è dovuta principalmente all'attenzione di Frege verso un modo profondamente rinnovato di fare matematica che si afferma nel XIX secolo; si pensi agli sforzi compiuti per dare all'analisi un assetto concettuale soddisfacente dopo lo sviluppo conosciuto nel secolo precedente, tanto ricco di risultati e di applicazioni, quanto caotico e confuso nelle premesse teoriche. In tale contesto la filosofia della matematica fu stimolata in parte da quell'esigenza di rigore che percorre un po' tutta la matematica ottocentesca e in parte dalla necessità di valutare le conseguenze di fatti nuovi importanti come la scoperta delle geometrie non euclidee o l'emergere della teoria degli insiemi. Con "crisi dei fondamenti della matematica" si indica l'ampio dibattito che ha coinvolto la comunità dei matematici e dei filosofi nel primo trentennio del XX secolo, incentrato sulla natura della matematica, cioè su quali siano, se ci sono, gli enti primitivi indimostrabili che costituiscono il punto di partenza di questa disciplina. In sintesi, ci si chiedeva qual è la risposta giusta alla domanda "Cos'è la matematica?". Dalle nuove impostazioni epistemologiche derivò addirittura la nascita di nuove discipline, come la teoria della dimostrazione, ed il consolidamento di quelle emergenti, come la logica matematica.

Fornendo un esposizione della nascita e dello sviluppo di alcuni approcci al problema dei fondamenti che ebbero rilevanza speciale, logicismo, formalismo e intuizionismo, il secondo capitolo verte sulle radici storiche più recenti, fino ai teoremi di Gödel e al suo platonismo. I teoremi di Gödel nascevano in relazione al programma di Hilbert, che chiedeva di formalizzare tutte le teorie matematiche esistenti attraverso un insieme finito di assiomi e dimostrare che questi assiomi non conducono a contraddizioni. Con qualche semplificazione, il primo teorema di incompletezza di Gödel afferma che in ogni sistema assiomatico consistente in grado di descrivere l'aritmetica dei numeri interi è possibile costruire proposizioni che non possono essere dimostrate né confutate sulla base degli assiomi di partenza. Il secondo teorema, che si dimostra formalizzando una parte della dimostrazione del primo teorema all'interno del sistema stesso, afferma che un sistema coerente non può essere utilizzato per dimostrare la sua stessa coerenza. Gli effetti sul programma di Hilbert furono devastanti; infatti, se nemmeno un sistema formale come quello dell'aritmetica elementare può essere utilizzato per provare la propria stessa coerenza, così, a maggior ragione, esso non può essere utilizzato per dimostrare la coerenza di sistemi più potenti. I due teoremi, il primo in particolare, furono da Gödel interpretati come una conferma del platonismo: la sua convinzione era che la verità, essendo qualcosa di oggettivo, non può essere ricondotta semplicemente alla nozione di dimostrabilità.

Dopo aver dedicato uno spazio relativamente breve alla ricognizione storica del problema, con il terzo capitolo l'attenzione degli autori si sposta su due articoli di Paul Benacerraf, che stanno all'origine del dibattito contemporaneo, allo scopo di fornire un panorama articolato e introduttivo della discussione attuale su questo problema, che la filosofia contemporanea della matematica, come mostrano efficacemente i primi capitoli, eredita dalla sua tradizione.

Il primo articolo di Benacerraf che diede origine a un ampio e ancor vivo dibattito su una possibile obiezione ontologica al realismo matematico, *What Numbers Could Not Be*, apparve nel 1965. L'obiezione ontologica di Benacerraf parte dall'osservazione che, a seconda di quale teoria degli insiemi viene presupposta, la serie dei numeri naturali 1, 2, 3,... viene identificata con due diverse serie di insiemi. Ma un oggetto vero e proprio non può essere allo stesso tempo identico a due oggetti distinti; oltretutto, i due insiemi che dovrebbero corrispondere allo stesso numero hanno diverse cardinalità[1]. Dunque, non essendoci un'argomentazione

[1] Cfr. (Benacerraf, 1965).

per decidere quale concezione colga effettivamente la natura del numero in quanto tale[2], ne consegue che i numeri non possono essere identificati con insiemi particolari.

Mathematical Truth apparve nel 1973; in esso Benacerraf presenta un dilemma che scaturisce da due esigenze opposte, ma entrambe all'origine delle varie teorie sulla natura delle verità matematiche:

1. la preoccupazione di avere una teoria semantica omogenea in cui la semantica per gli enunciati della matematica sia parallela alla semantica per il resto del linguaggio;

2. la preoccupazione che la trattazione della verità matematica si unisca ad una plausibile epistemologia[3].

Secondo Benacerraf, la storia della filosofia della matematica mostra come «tutte le teorie concernenti la verità matematica cerchino di accontentare uno di questi due padroni *a spese dell'altro*.»[4] Il problema è che non sembra plausibile asserire allo stesso tempo che gli oggetti matematici sono astratti, che esistono indipendentemente da noi e che sono per noi accessibili. È il cosiddetto problema dell'accesso. Una grande parte della discussione degli ultimi trentacinque anni sul problema di Platone si è concentrata, esplicitamente o meno, sui tentativi di rispondere al dilemma: tentativi che per i platonisti si sono congiunti allo sforzo di contrastare l'argomento di Benacerraf (1965).

Panza e Sereni assecondano la proposta di Hale e Wright (1992) di classificare le risposte al dilemma distinguendo fra risposte "conservative" e non. Le prime sono quelle che affrontano il dilemma frontalmente, condividendo le premesse di Benacerraf, e si inquadrano tutte, sia pure in modi diversi, nella tradizione del platonismo. Nel quarto capitolo gli autori prendono in considerazione alcune fra queste teorie, che ritengono particolarmente significative: il neologicismo di Hale e Wright, la *Object Theory* di Linsky e Zalta, lo strutturalismo non-eliminativo *ante rem* di Shapiro, la versione dello strutturalismo non-eliminativo di Parsons. Il quinto capitolo è dedicato alle principali risposte non conservative, ovvero che rigettano almeno una delle due condizioni poste da Benacerraf: il nominalsimo di Field, il finzionalismo, sia nella versione dello stesso Field che in quella di Yablo, lo strutturalismo eliminativo modale di Geoffrey Hellman e il platonismo a base empirista e cognitiva di Maddy.

Gli ultimi due capitoli sono interamente dedicati all'esposizione dell'argomento di indispensabilità (AI), generalmente attribuito a Quine e Putnam, anche se la prima formulazione esplicita si deve a (Putnam, 1971) e al dibattito che ha generato. Secondo AI siamo impegnati a riconoscere come entità legittime ciò che le nostre teorie scientifiche richiedono per i propri scopi (non solo la stessa matematica, ma anche, ad esempio, la fisica); in particolare l'accettazione degli enti numerici sarebbe una condizione necessaria per l'accettazione della verità della scienza. AI ambisce dunque a basarsi su considerazioni *a posteriori*, cioè dipendenti dallo sviluppo del sapere e dalle sue necessità, risultando così particolarmente congeniale a coloro che, specie se di impostazione empirista, bandiscono i ragionamenti *a priori* dal dibattito in ontologia. Uno degli aspetti che fanno di AI un argomento particolarmente potente è che promette di fornire una giustificazione per l'esistenza di oggetti matematici, o almeno per la verità di teorie matematiche, basandosi su premesse che sembrano accettabili anche per un nominalista, come la semplice constatazione che certe teorie matematiche intervengono nella formulazione di teorie scientifiche. Con l'esposizione di AI lo scopo è dare uno spaccato circostanziato della discussione in corso, facendo emergere, oltre ad un confronto fra le di-

[2]Cfr. (Benacerraf, 1965).
[3]Cfr. (Benacerraf, 1973).
[4](Benacerraf, 1973), corsivo dell'autore.

verse opzioni filosofiche generali presentate in una forma più o meno compiuta, un lavoro di dettaglio, che mostra la filosofia all'opera su una problematica particolare.

Sviluppandosi intorno al contrasto tra realismo e antirealismo matematico e mostrando i pregi e i limiti di entrambe le impostazioni, *Il problema di Platone* riesce a presentare agilmente le principali correnti in filosofia della matematica, toccando abbastanza da vicino alcuni temi centrali nel dibattito novecentesco, come il tentativo di armonizzare il naturalismo con il carattere apparentemente non esperienziale della verità e della conoscenza matematica o come la ricerca di linguaggi formali che permettano un appello illimitato alle verità matematiche senza pesanti bagagli ontologici. Un pregio di questa introduzione relativamente voluminosa (360 p.) è il fatto che si presti ad una lettura parziale: per esempio, il lettore meno interessato agli sviluppi più recenti del dibattito può limitarsi alla lettura delle prime due parti; i capitoli successivi invece, mostrando esempi specifici e significativi del dibattito contemporaneo, sono un ottimo appoggio per chi volesse acquisire familiarità con la filosofia della matematica contemporanea e orientarsi nei suoi numerosi labirinti.

Benché il libro sia rivolto a chiunque sia attratto dall'idea di avvicinarsi alla materia, sono richieste, per una lettura seria, alcune conoscenze pregresse relative a discipline diverse, come la matematica stessa, la logica, la filosofia del linguaggio, ecc. Gli autori infatti, seppur cercando di strutturare la presentazione tenendo a mente il suo carattere introduttivo, non tendono a sacrificare la complessità degli argomenti per facilitare la comprensione al lettore inesperto. In questo modo la scorrevolezza risulta in certi punti ridotta, richiedendo uno sforzo in più da parte del lettore (sforzo che risulta senz'altro premiato da un'adeguata comprensione degli argomenti). La prefazione, con un paragrafo dedicato alle convenzioni terminologiche adottate, è indicativa dell'impegno degli autori per fornire una propedeutica alla lettura: vi si trova una distinzione tra semantica e sintassi, un richiamo alla nozione di teoria, di asserto, ecc.

Ovviamente il testo si offre come un valido strumento non solo per i filosofi, ma anche per i matematici. Alcuni filosofi della matematica considerano come loro compito quello di rendere conto della matematica e della pratica matematica così come si presentano, fornendo una loro interpretazione piuttosto che una loro critica. D'altra parte, le critiche possono avere ramificazioni importanti per la pratica matematica e quindi la filosofia della matematica può presentare un interesse diretto per il lavoro del matematico. Il breve panorama degli sviluppi della materia e delle attività di ricerca nella seconda metà del Novecento fornito nel *Problema di Platone* credo dia una prova sufficiente della continua vitalità della filosofia della matematica, del crescente interesse che essa suscita e della sua centralità nel dibattito contemporaneo.

Riferimenti bibliografici

Benacerraf, P. (1965). What numbers could not be. *Philosophical review*. 123, 124

Benacerraf, P. (1973). Mathematical truth. *The Journal of Philosophy*. 124

Hale, B. and C. Wright (1992). Nominalism and the contingency of abstract objects. *The Journal of Philosophy*. 124

Putnam, H. (1971). *Philosophy of Logic*. Harper and Row. 124

Peer Review Journal
Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 © http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

DISCORSO SULLA MATEMATICA
UNA RILETTURA DELLE LEZIONI AMERICANE DI ITALO CALVINO

Gabriele Lolli

[Bollati Boringhieri – Torino, 2011]

Bianca Cepollaro

Six memos for the next millennium[1]

1. *Lightness*
2. *Quickness*
3. *Exactitude*
4. *Visibility*
5. *Multiplicity*
6. *Consistency*

Con l'avvicinarsi del nuovo millennio, Italo Calvino formula sei proposte di valori a cui la letteratura dovrebbe ispirarsi: sei promemoria, per non perdere di vista le qualità della buona letteratura.

Gabriele Lolli legge nelle *Lezioni americane* uno spunto interessante non solo per autori e fruitori di testi letterari, ma anche per i matematici: come se i promemoria di Calvino fossero un *vademecum* valido anche per chi si occupa di matematica. L'operazione che Lolli compie nel suo Discorso non è banale: l'idea di applicare alla matematica dei criteri formali formulati da un letterato si basa su un'assunzione di fondo per nulla scontata, e tutta da giustificare: esiste una comunanza, un'affinità, tra il fare letteratura e il fare matematica. Ciò che si può facilmente ammettere è che vi sia una somiglianza nell'atteggiamento di chi crea, inventa, scopre, a prescindere dal campo di indagine e creazione, ma questo non sembra essere una concessione sufficientemente forte per giustificare un'operazione come quella del *Discorso sulla matematica*.

Ciò che emerge nella trattazione di Lolli è che le affinità tra letteratura e matematica non risiedono soltanto nel comune atteggiamento di creazione e invenzione, non consistono

[1]Titolo originale per il ciclo di lezioni che Calvino avrebbe dovuto tenere ad Harvard nell'anno accademico 1985-1986. Calvino morì nel settembre 1985, e le lezioni non ebbero luogo. Gli appunti di Calvino sono stati pubblicati in Italia col titolo *Lezioni americane*.

AUTORE. Bianca Cepollaro. bianca_cepollaro@hotmail.it

solo in affinità tra tipi di intelligenza – spunto non poi così balzano e che si può accettare senza compromettersi troppo. Secondo Lolli le due discipline sono accomunate anche dagli obiettivi che si prefiggono coloro che ambiscono a produrre letteratura o matematica, e dalle caratteristiche che che tali prodotti dovrebbero presentare.

Lolli-matematico offre un'ampia e dettagliata rassegna dei casi (teorie, dimostrazioni, raffigurazioni geometriche) in cui le qualità enunciate da Calvino si prestano a descrivere con precisione alcune caratteristiche della matematica. Non tutti i casi si rivelano ugualmente accessibili a un lettore scarsamente esperto di discipline scientifiche e tuttavia, tre considerazioni possono risultare efficaci a prescindere dalle competenze matematiche.

La prima riguarda la lezione *Leggerezza*. Secondo Calvino, il compito dello scrittore è togliere peso al linguaggio: togliere peso agli oggetti concreti che entrano a far parte dei racconti, e alle strutture che articolano i testi. L'evoluzione matematica nasce da un medesimo processo di alleggerimento: dal mondo concreto è necessario passare a un mondo astratto, più leggero; e dal linguaggio naturale, così grezzo nella sua espressività, è necessario passare a un linguaggio formalizzato. In entrambi i campi, il metodo con cui si pratica l'alleggerimento è quello dell'omissione, graduale e progressiva. In proposito, è suggestivo il fatto che in molti idiomi si usino termini che derivano da *calculus*, (plur. *calculi*), i sassolini con cui contare. Dai sassolini ai calcolatori, la ricerca della leggerezza.

Un secondo punto molto efficace riguarda il principio di rapidità in letteratura, così come in matematica. La lezione *Rapidità* non è un elogio vano della velocità, ma è piuttosto un'esaltazione del ritmo. In letteratura, il ritmo è dato dalla consequenzialità delle azioni, dall'ineluttabilità con cui l'una segue all'altra. Il principio con cui si ottiene un risultato simile è quello dell'economia: se si introduce un personaggio, un oggetto, o un luogo, questo deve contribuire allo svolgersi del racconto. Lo stesso si potrebbe dire delle dimostrazioni matematiche. Una dimostrazione è tanto piacevole quanto più raggiunge l'obiettivo dell'economia: ogni passaggio è chiaramente dedotto dal precedente, e tutto ciò che si dice è essenziale allo svolgimento della dimostrazione stessa. «La dimostrazione va dritta allo scopo senza nessuna divagazione»[2]. Naturalmente, l'economia è sinonimo di eleganza solo se il compromesso con la chiarezza dell'esposizione non diventa eccessivo. A questo proposito, Lolli nota come nella didattica della matematica si tenda a proporre testi che prediligono una trattazione chiara e che offrono una preparazione solida, piuttosto che testi che stimolano l'agilità mentale, la capacità di trovare soluzioni alternative, scorciatoie dimostrative etc. In altre parole, anche la didattica della matematica potrebbe attingere ai *memos* calviniani.

La terza riflessione particolarmente interessante nel paragone tra i principi che governano letteratura e matematica si ispira alla lezione *Esattezza*. Calvino è interessato alla tensione tra esattezza e indeterminatezza in letteratura, e nel tentativo di portare avanti un discorso sull'esattezza, si trova a trattare lungamente dell'indeterminatezza: «Questa conferenza non si lascia guidare nella direzione che m'ero proposto. Ero partito per parlare dell'esattezza, non dell'infinito e del cosmo. [...] Ma forse è proprio questa idea [di esattezza] che richiama quella di ciò che non ha fine»[3]. Per Calvino la trattazione dell'infinito in letteratura è stata declinata, per mancanza di strumenti che invece la matematica sembra possedere, in trattazione dell'indefinito. Per considerare il binomio esattezza-indeterminatezza, Calvino prende in considerazione il Leopardi dell'*Infinito* e dello *Zibaldone*. Ciò che emerge è che la trattazione dell'indefinito sembra scaturire proprio dall'esattezza, dalla precisione e dall'attenzione meticolosa della composizione letteraria. Lolli coglie in esattezza e indeterminatezza due poli fondamentali del discorso matematico. L'esattezza è un fine da raggiungere, non è un fatto,

[2](Lolli, 2011, p.86).

[3](Calvino, 1988, p.67).

e l'indeterminatezza non sempre è lo stato che precede l'intervento dell'esattezza, ma anzi, in alcuni casi, «Il matematico produce l'indeterminatezza lavorando con la massima esattezza»[4] Lolli ha in mente in particolare i teoremi di incompletezza di Gödel, che sembrano essere la massima espressione della coesistenza di esattezza ed indeterminatezza, anche in matematica.

Gli esempi citati si sono scelti in quanto emblematici dell'operazione di paragone proposta in *Discorso sulla Matematica*, ma se ne potrebbero prendere in considerazione molti altri. Sicuramente, il tipo di formazione di ciascun lettore rende alcuni casi più illuminanti di altri. Senza l'enunciazione e l'illustrazione dei casi concreti che mostrano i principi comuni che governano letteratura e matematica, il discorso di Lolli perderebbe il proprio potere illustrativo e la propria incisività; e tuttavia, ciò che risulta filosoficamente più interessante è la giustificazione dell'operazione stessa – a cui viene dedicata solo l'Introduzione –, dal momento che Lolli sembra intendere il paragone tra letteratura e matematica come qualcosa di più di una suggestione, come qualcosa di più forte di un'analogia. Gli esempi proposti dovrebbero mostrare che l'analogia letteratura-matematica non è solo una curiosità o un colto e intrigante *divertissement*, e tuttavia lasciano il lettore un po'confuso circa quali conclusioni si possano quindi trarre al riguardo.

La contaminazione tra matematica e letteratura, al di là della sua giustificazione, si è già dimostrata fertile, nel caso di scrittori che si ispirano a principi di composizione matematico-geometrici, come lo stesso Calvino dichiara esplicitamente di fare. Sarebbe curioso interrogarsi sulla possibilità di un tipo di contaminazione in direzione opposta. E' possibile che le idee di un letterato giungano a ispirare le ricerche di un matematico o nelle due discipline vigono semplicemente principi affini? Il testo di Lolli offre una ampia rosa di contaminazioni e suggestioni, ma una giustificazione teorica è ancora tutta da indagare.

[4](Lolli, 2011, p.144).

Riferimenti bibliografici

Calvino, I. (1988). *Lezioni Americane*. Garzanti, Milano. 128

Lolli, G. (2011). *Discorso sulla Matematica*. Bollati Boringhieri, Torino. 128, 129

Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 (cc) http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

La computabilità: algoritmi, logica, calcolatori

Marcello Frixione e Dario Palladino

[Carocci Editore – Roma, 2011]

Michele Herbstritt

Chi conosce già le *Bussole* di Carocci, sa cosa è lecito aspettarsi da *La computabilità: Algoritmi, Logica, Calcolatori*, di Marcello Frixione e Dario Palladino. Chi non le conosce, d'altra parte, avrà sicuramente di che stupirsi. Dando per scontato che ci si possa stupire tanto negativamente quanto positivamente, si può certamente dire che i modi di stupirsi per questo libro sono (almeno) due, diversi nelle cause e opposti negli effetti. Se, in quanto segue, lo "stupore" sembra un concetto troppo forte, si sostituisca a esso la "sorpresa" o l'"inaspettato": dovrebbero andar bene ugualmente.

Il modo di dire *in cauda venenum* esercita indubbiamente un certo fascino, ma in questa sede si preferisce lasciarlo da parte, cominciando a trattare (brevemente) proprio a partire dalla "brutta sorpresa", se così si può chiamare, che aspetta il lettore digiuno di Bussole e, magari, già parzialmente satollo di computabilità. I temi affrontati nelle cento pagine e poco più sono tra quelli che ci si aspetterebbe: introduzione agli algoritmi, esposizione del modello di Turing, definizione delle funzioni ricorsive, tesi di Church. E poco altro. Niente gradi di resolubilità e niente teoremi di Kleene. Chi di computabilità sa (o cerca) qualcosa di più, non lo può certo trovare qui.[1]

Fortunatamente, le "brutte sorprese" hanno anche una funzione, si passi l'esagerazione, educativa. Affrontare la lettura di una Bussola con aspettative sbagliate non può che portare a delusioni. Ma quali sono, dunque, le giuste aspettative? A questo proposito viene in aiuto la quarta di copertina: «Chiare, essenziali, accurate: le guide Carocci per orientarsi nei principali temi della cultura contemporanea», questa la definizione ufficiale di cosa siano le *Bussole*, e poi, poco più in basso: «Il testo si propone di esporre i concetti fondamentali della computabilità senza presupporre alcuna conoscenza tecnica preliminare [...]». Ebbene, tenendo a mente queste premesse, le aspettative sono giustamente ridimensionate.

Si tratta quindi di ricominciare da capo, come si è detto, con le giuste aspettative. Ed è a questo punto che subentra il secondo motivo di stupore, la "bella sorpresa", se così la si vuole chiamare. Perché se ci si accontenta della quantità e del grado di approfondimento degli argomenti trattati, non si può non rimanere colpiti dalla chiarezza con cui questi sono esposti. Tutta la trattazione è una sorta di piacevole passeggiata in cui il lettore è accompagnato per

[1]Chi cercasse una discussione più completa e approfondita dei temi trattati può consultare (Frixione and Palladino, 2004), manuale che gli autori stessi indicano come fonte principale. In lingua inglese, invece, un manuale di teoria della computabilità sicuramente ottimo ma anche più tecnico e impegnativo è (Boolos et al., 2007).

Autore. Michele Herbstritt. michele.herbstritt@studenti.unimi.com

mano (talvolta addirittura portato in lettigia) verso la comprensione di temi, va detto, non sempre semplicissimi.

Il primo capitolo ha un carattere del tutto informale e introduttivo: il lettore che avesse anche solo una vaga idea del significato della parola *algoritmo* ha a sua disposizione una dozzina abbondante di pagine per farsene un'idea più precisa e rigorosa. Gli esempi, di carattere matematico e non, sono chiari e funzionali; la sezione relativa ai diagrammi di flusso molto utile in particolare per assimilare il concetto di ciclo (finito e non); l'accenno ai metodi di codifica dei dati, facendo riferimento al mondo (più quotidiano) dei calcolatori elettronici, risulta efficace. Forse, gli autori avrebbero potuto mettere l'accento un po' di più sul fatto che i concetti di cui si tratta rimangono esplicitati solo a livello intuitivo e, *quindi*, che sarà necessario renderli rigorosi in seguito.

Come è naturale, il concetto (informale) di algoritmo viene collegato a quello di funzione (calcolabile), nel secondo capitolo. Qui una qualche abitudine al ragionamento e alla notazione matematici risulta senz'altro di una certa utilità, ma la trattazione è comunque portata avanti per gradi, a partire dalla definizione generale di funzione, raffinata poi in quella di funzione calcolabile (totale o parziale), per giungere con un'accelerata finale a mostrare addirittura che l'insieme delle funzioni calcolabili non esaurirà mai l'insieme delle funzioni aritmetiche (quest'ultima dimostrazione, fondata sul ragionamento diagonale *a là* Cantor, è effettivamente più impegnativa, perché presuppone un certo grado di familiarità con alcune nozioni più avanzate di teoria degli insieme, come quella di cardinalità).

Una volta introdotti i concetti fondamentali della disciplina, non resta che "svelare l'assassino", rivelando come sia possibile rendere rigorosi i concetti di algoritmo e di funzione calcolabile. Il terzo capitolo ha precisamente questo scopo, essendo dedicato alle macchine di Turing. Dopo una concisa introduzione storica, che dà un'idea del contesto scientifico in cui inserire il famoso articolo di Turing (1936), gli autori forniscono un'esposizione piuttosto tradizionale di che cosa siano le macchine di Turing e in cosa consista il modello computazionale che si basa su di esse (le funzioni T-computabili). Anche in questo caso, gli esempi non mancano e la trattazione risulta molto chiara. Il cosiddetto *problema della fermata*, in cui certamente risiede una parte del merito scientifico di Turing, viene rimandata al quinto capitolo. Prima di allora, è necessario presentare almeno un "complice", un altro esempio di sostituito formale: le funzioni ricorsive.

Il quarto capitolo si occupa di funzioni ricorsive, e risulta essere il più impegnativo del libro. La classe delle funzioni ricorsive è definita a partire da quella delle funzioni ricorsive primitive, le quali sono sì funzioni calcolabili, ma non certo sufficienti a esaurire la classe di queste ultime (e due controesempi sono forniti a riguardo: la cosiddetta *funzione diagonale* e la funzione di Ackermann. Per ovviare ai problemi delle funzioni ricorsive primitive, si introduce il famoso operatore di minimalizzazione, ottenendo la classe delle funzioni ricorsive generali, vere candidate allo scopo di sostituire il concetto intuitivo di funzione calcolabile.

Come si è già detto, il quinto capitolo si occupa del problema della fermata. Ma non solo, ovviamente. Anzi, prima di trattare di problemi non risolubili per mezzo di un algoritmo, risulta necessario citare la tesi di Church: i modelli rigorosi elaborati per sostituire il concetto intuitivo di algoritmo, così ci si può esprimere, colgono nel segno; in altri termini: le funzioni calcolabili sono tutte e sole quelle T-computabili/ricorsive generali. A favore della tesi di Church gli autori forniscono tre argomenti: quello di *evidenza euristica* (così la chiamano), relativo sostanzialmente al fatto che tutte le funzioni calcolabili a noi note sono effettivamente T-computabili/ricorsive generali; quello di carattere più logico, relativo al fatto che *tutte* le sistemazioni formali elaborate con lo scopo di sostituire il concetto intuitivo di algoritmo risultano equivalenti fra loro (si citano, fra gli altri, la lambda-ricorsività, Herbrand-Gödel ricorsività e gli algoritmi di Markov); quello che fa perno sulla natura indipendente e sostanzialmente non matematica del modello di Turing. Una volta stabilita l'alta plausibilità della tesi di Church, non resta agli autori che introdurre la macchina di Turing universale e il noto procedimento diagonale che porta alla definizione di un problema insolubile per mezzo di macchine di Turing (il problema della fermata), e dunque, modulo tesi di Church, insolubile in maniera algoritmica.

Giunto in fondo al quinto capitolo, il lettore (precedentemente) digiuno avrà sicuramente un bel po' di materiale su cui riflettere e, in fin dei conti, potrebbe decidere di fermarsi, almeno temporaneamente, avendo appreso i basilari di teoria della computabilità. Per chi decidesse poi di continuare la lettura, il libro garantisce altri due capitoli, di carattere più generale, dedicati a mostrare alcuni dei collegamenti vigenti fra la teoria in questione e altri interessanti temi.

Il sesto capitolo, in una dozzina di pagine, vuole essere un introduzione al problema dei Fondamenti della Matematica, a partire dalle geometrie non euclidee fino al teorema di incompletezza di Gödel (di cui è addirittura presente una dimostrazione). L'*excursus* storico è interessante, ma risulta un po' frettoloso e, forse, sarebbe stato più utile all'inizio del libro. Il teorema di incompletezza di Gödel ha senza dubbio un suo valore intrinseco che ne rende interessante l'esposizione a prescindere, ma la decisione di fornirne una dimostrazione (per quanto informale) in un libro introduttivo come questo forse non è stata delle migliori.

L'ultimo capitolo del libro, decisamente più azzeccato, è dedicato innanzitutto a mostrare come la teoria della computabilità sia strettamente in relazione con l'informatica, fino a potersi caratterizzare come fondamento teorico di quest'ultima. A questo scopo vengono introdotti i concetti informatici fondamentali (unità di *input* e di *output*, *CPU*, programma memorizzato, linguaggio di programmazione) e viene mostrato in che modo l'architettura di von Neumannn (sulla quale si basano i calcolatori contemporanei) possa essere messa in relazione con la macchina di Turing universale, di cui si accennava nel quinto capitolo. Infine, non manca un accenno ad alcune questioni di complessità computazionale.

La seconda parte del capitolo si occupa di mostrare in che rapporto stia la teoria della computabilità con la scienza cognitiva. Quest'ultima viene introdotta da un punto di vista storico e concettuale come una reazione al comportamentismo fondata sui concetti e sugli strumenti della teoria della computabilità: il funzionalismo che caratterizzava la prima impostazione cognitivista considerava possibile una descrizione dei processi mentali in termini di computazioni, facendo astrazione dal supporto fisico che realizza i processi mentali e concentrando l'attenzione sulle proprietà logiche, i rapporti reciproci e funzionali degli stati mentali. L'impostazione funzionalista ha lasciato il posto a nuovi sviluppi, più attenti alla dimensione neurobiologica della mente (gli studi sul cervello) e a quella ecologica (*embodied mind*, rapporto fra mente e ambiente), ma gli autori sostengono che i recenti sviluppi non siano necessariamente in contraddizione con un'impostazione, in fondo, computazionale, citando a sostegno alcune interessanti riflessioni metodologico dello scienziato cognitivo David Marr.

Riferimenti bibliografici

Boolos, G. S., J. P. Burgess, and R. C. Jeffrey (2007). *Computability and Logic*. Cambridge University Press. 131

Frixione, M. and D. Palladino (2004). *Funzioni, Macchine, Algoritmi*. Carocci. 131

Turing, A. M. (1936). On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 132

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 © http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

I CONFINI LOGICI DELLA MATEMATICA

Giuseppe Ragunì

[Aracne Editore – Roma, 2010]

Giacomo Lini

Il valore limitativo che hanno alcuni teoremi, e metatoremi, nei confronti della matematica, è da considerarsi uno strumento molto potente a nostra disposizione. Affermare una serie di condizioni (per citarne alcune coerenza, completezza semantica, buona definizione. . .) relativamente a un sistema assiomatico formale consente di determinare quali siano i "limiti" di detto sistema. E le conseguenze epistemologiche che si possono trarre dal fatto che la matematica abbia dei limiti, contrariamente alla sua «aura dorata di inoppugnabile infallibilità»,[1] sembrano enormi, tanto da essere molto spesso chiamate in causa (a volte anche a sproposito). Il lavoro di Giuseppe Ragunì, dal titolo, appunto, de "*I Confini Logici della Matematica*", intende prendere in esame questi teoremi, da quelli di Gödel sull'incompletezza ai risultati di Chaitin sulla casualità, passando per la Tesi di Church-Turing, al fine di fare pulizia concettuale circa le conseguenze che ne derivano. E al contempo vuole costituirsi come un lavoro di natura introduttiva e divulgativa, adatto non solo ad un pubblico di "esperti" della materia, bensì anche a chi si interessa in maniera meno specifica alla Logica Matematica.

La sezione introduttiva, per chi persegue un tale duplice scopo, non può non essere quella di presentazione dei concetti fondamentali cui servirà fare ricorso: su tutti quelli di sistema assiomatico formale, di metamatematica, di teoria deduttiva, di coerenza e di completezza sintattica. Un discorso a parte merita invece, in questo contesto, la trattazione del tema relativo alla *distinguibilità* e alla *buona definizione*. Il primo termine viene introdotto per definire particolari tipi di insiemi, cioè quelli in cui, preso un qualsiasi elemento, sono in grado di stabilire se esso appartiene o meno all'insieme, attraverso una procedura matematica. Questa condizione, apparentemente identica a quella di *decidibilità*, se ne discosta per via del fatto di essere più debole. Per fare ulteriore chiarezza circa questo argomento, si consideri il seguente esempio: sia l'insieme A; sia dunque p_i la funzione che descrive il comportamento della procedura che consente di determinare se un certo elemento i appartiene o meno all'insieme. Nel caso di insiemi distinguibili si richiede che per ogni elemento del dominio di partenza esista una procedura (intuitiva o formale), che renda conto dell'appartenenza o meno dell'individuo all'insieme. Perché una collezione sia decidibile si impone invece che esista una procedura p che, preso un qualsiasi elemento del dominio, sia in grado di caratterizzare la sua presenza o meno nell'insieme A. Da qui segue la definizione di sistema ben definito: un sistema logico

[1] Ragunì (2010), p. 250.

AUTORE. Giacomo Lini. giacomo.lini8188@gmail.com

formale è ben definito se l'insieme delle proposizioni è *distinguibile*, i teoremi sono proposizioni di cui esiste almeno una dimostrazione e l'insieme delle dimostrazioni è una collezione *distinguibile* di stringhe finite di caratteri.

Nella seconda parte del lavoro, che consiste nella presentazione di alcuni importanti metarisultati relativi ai sistemi formali (correttezza e completezza semantica), Ragunì mostra come sia possibile mettere in luce «problemi e disaccordi circa alcuni principi semantico-logici usati in alcune metadimostrazioni»,[2] fatto questo, che rende interessante l'indagine sulla possibilità dell'assiomatizzazione tanto dei concetti che causano queste "incomprensioni", nello specifico quelli di modello e di insieme, quanto dei vari sistemi formali. La teoria che viene assunta in quest'opera di assiomatizzazione è TI (Teoria Assiomatica degli Insiemi): considerato un determinato sistema assiomatico classico (per convenzione SC), esso si dirà *rappresentabile* all'interno di TI a condizione che le regole grammaticali e le proposizioni (intese entrambe come collezioni) possano essere interpretabili come elementi della teoria TI: vale a dire come insiemi. Nello specifico la tecnica di rappresentazione consiste nella formalizzazione delle premesse del linguaggio L_{SC} del sistema all'interno del linguaggio L_{TI} della teoria degli insiemi. La semantica che fonda un determinato SC può essere separata tra la sua componente propria (relativa alle premesse caratteristiche di SC) e quella invece relativa al «particolare Calcolo predicativo classico formale del primo ordine su cui SC è basato».[3] Attraverso la formalizzazione di questi concetti è possibile affermare che l'unica condizione che impedirebbe di "trascrivere" un sistema SC in termini del linguaggio L_{TI} sarebbe la coesistenza tra la coerenza di SC e l'incoerenza di TI. Pertanto «la riduzione insiemistica impone che *l'unico linguaggio da usarsi in Metamatematica sia quello che, al più, fa riferimento al sistema matematico TI*»,[4] ed è ora possibile rappresentare i concetti di interpretazione, coerenza, modello (...) con un unico linguaggio e sotto un'unica formalizzazione. Ciò tuttavia, come sostiene l'autore, non può essere fatto senza pagare nessun prezzo: bisogna assumere la coerenza di TI stesso.[5]

Definito un linguaggio che consente di studiare all'interno di sé stesso le proprietà dei sistemi formali, Ragunì prende in considerazione le proprietà di questi sistemi per arrivare a caratterizzare, attraverso un'analisi delle cardinalità degli insiemi (un concetto formalizzato solo in TI, e che richiede quindi la rappresentazione del linguaggio L_S in quello della teoria degli insiemi), quelli che vengono chiamati i "numeri dei sistemi assiomatici classici": essendo rappresentabili in TI sistemi che hanno cardinalità di qualsiasi tipo (finita, infinita numerabile e più che numerabile), siamo costretti a rinunciare alla *Semantica di Henkin*, che considera solo sistemi formali, quindi numerabili, in favore della *Semantica standard*, che ammette l'analisi di sistemi più che numerabili (che l'autore chiama intrinsecamente semantici). Anche per quanto riguarda la metamatematica siamo in grado di caratterizzare il numero di espressioni dotate di significato: «La semantica si caratterizza per la sua capacità di denotare con un *signum* ogni ente o concetto che abbia un significato. [...] Anche "la collezione di tutte le espressioni semantiche" è un'espressione significativa.».[6] In virtù di questi ragionamenti è possibile affermare che «il numero di espressioni semantiche non è inferiore a nessuna cardinalità.»;[7] Ragunì propone per denotare questo numero (che non è da considerarsi un numero matematico) il termine *iperinnumerabile*. Queste considerazioni circa la

[2]Ragunì (2010), p. 75.

[3]Ragunì (2010), p. 83.

[4]Ragunì (2010), p. 89.

[5]È evidente infatti, che senza questa assunzione non saremmo in grado di formalizzare il linguaggio degli altri sistemi in TI.

[6]Ragunì (2010), p. 116.

[7]Ragunì (2010), p. 117.

cardinalità dei sistemi assiomatici e i numeri che servono per denotarle, che risultano spesso sconnesse e poco chiare al lettore, servono come premessa alla formalizzazione del teorema di completezza semantica all'interno di TI e alla valutazione delle sue conseguenze come la riducibilità del linguaggio di un sistema per cui vale il teorema al primo ordine (Teorema di Lindström), e le ripercussioni sul tipo di modelli della teoria per cui esso vale (che porta all'enunciazione del teorema di Löwenheim-Skolem).

La parte più ricca del lavoro di Ragunì, e più rilevante da un punto di vista scientifico, è la terza, quella relativa ai risultati di incompletezza e indecidibilità, i veri teoremi "limitativi" della matematica. Questa analisi non viene svolta dal punto di vista rigoroso e formale della dimostrazione degli enunciati, ma relativamente alla valutazione delle conseguenze più o meno giustificate, che ne sono state tratte. E lo scopo è, come detto in precedenza, e come precisato dall'autore in diversi passi, quello di sgombrare il campo da fraintendimenti. Viene riconsiderato il presunto valore indeterministico del primo teorema di Gödel, «infatti ogni enunciato indecidibile, in base al Teorema di completezza semantica, può essere riconosciuto mediante la considerazione di opportuni modelli del Sistema.».[8] Anche le presunte tesi di Chaitin sulla casualità nell'aritmetica Chaitin (1975) e Chaitin (1982), che prendono le mosse dall'estensione dell'incompletezza al campo dell'informatica sono oggetto di critica, con la riproposizione delle tesi già avanzate in Franzén (2005), dove si sostiene che il concetto di casualità sia una proprietà riguardante le stringhe di caratteri che solo per mezzo di particolari codificazioni si ripercuote sui numeri, ma non li interessa in via indipendente dall'arbitrio della codifica. L'ultima grossa tesi presente nel testo è relativa al secondo Teorema di Incompletezza, anch'esso spogliato del suo valore epistemologico: esso generalizza le conclusioni del primo Teorema, ma non afferma nell'interpretazione di Ragunì che se un sistema è coerente allora l'enunciato può essere concluso con il solo utilizzo del linguaggio di detto sistema .[9] Questa conclusione può essere tratta attraverso un risultato più generale che viene chiamato dall'autore *Metateorema di indimostrabilità della coerenza interna*. Indipendentemente dal nome che viene dato a questa conclusione, è interessante fare alcune osservazioni su TI alla luce dell'enunciato: in precedenza si è detto che la formalizzazione della matematica nella teoria degli insiemi non poteva essere fatta a meno di supporre la coerenza della teoria che vogliamo utilizzare come "contenitore"; alla luce del metateorema però dobbiamo fare i conti con l'impossibilità di dimostrare la coerenza di TI senza fare riferimento a linguaggi esterni a TI. Ammettendo un nuovo "contenitore" avremmo risolto il problema per la teoria degli insiemi, ma non avremmo guadagnato nulla in fin dei conti, perché la questione sulla coerenza sarebbe solo spostata ad un passo successivo, vale a dire al sistema all'interno del quale abbiamo descritto il linguaggio di TI.

Il lavoro di Ragunì risulta in definitiva inadatto ad entrambi gli scopi che si pone: come manuale di carattere introduttivo allo studio della Logica Matematica appare troppo confuso, specialmente nella seconda sezione, circa alcuni temi di carattere tecnico sui quali sarebbe bene essere più chiari (forse l'utilizzo maggiore del formalismo avrebbe dato una mano in tal senso); come lavoro scientifico, nella terza parte, risulta completamente slegato rispetto alle prime due parti del libro. E pur proponendo delle tesi (alcune valide, altre che lo sembrano molto meno), non sembra lanciarsi mai in una difesa di esse che va al di là della dimensione strettamente intuitiva.

[8]Ragunì (2010), p. 252.
[9]La tesi di Ragunì vuole criticare ad esempio Odifreddi (1994).

Riferimenti bibliografici

Chaitin, G. (1975). Casualità e dimostrazione matematica. *Le Scienze*. 137

Chaitin, G. (1982). Gödel's theorem and information. *International Journal of Theoretical Physics*. 137

Franzén, T. (2005). *Gödel's Theorem: an incomplete guide to its use and abuse*. A.K. Peters. 137

Odifreddi, P. (1994). Metamorfosi di un teorema. Disponibile all'indirizzo: http://www.itg-rondani.it/dida/Matem/ipermonica/logica/Storia/metamorf.htm. 137

Ragunì, G. (2010). *I Confini Logici della Matematica*. Aracne. 135, 136, 137

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 http://www.rifanalitica.it
Sponsored by *Società Italiana di Filosofia Analitica*

MEETING DAN SPERBER'S CHALLENGE TO SEARLEAN SOCIAL ONTOLOGY

Guglielmo Feis

ABSTRACT. What follows is a brief commentary to Dan Sperber's plenary lecture at ECAP7 "The deconstruction of social unreality". Sperber's main criticism to Searle's social ontology[1] is that Searle attributes a causal role to mere Cambridge properties (in Sperber's example: Jones dies, so the rest of the world gains the Cambridge status of "Jones' survivors"). Sperber then argues that declarations do not create institutional facts causally, criticizes the Serlean theory of recognition/acceptance and put forward his thesis using the concept cognitive causal chains.

KEYWORDS. Social Ontology, Dan Sperber, John Searle, Cambridge Properties.

[1]In his talk Sperber worked on the latter view of social ontology of Searle (2010).

AUTHOR. Guglielmo Feis. g_feis@hotmail.it
RECEIVED. 5th October 2011 **ACCEPTED**. 31st October 2011

I agree with Sperber's new frame and I'm fascinated by his approach in which institutions are high-ordered level representation that causally cheracterize the distribution of lower level and by his use of cognitive causal chains as building blocks of social reality. Here I try to go along Sperber's path and, avoiding hypostatization of Cambridge chance, I want to provide a better descripted taxonomy of he insititutional real with the help of three parameters I will use to map and track social entities.

My three parameters will be:

1. The *degree of materiality of the entity* (i.e. is the entity a concrete object? Is it a freestanding Y term? If so, what are its empirical representations?);

2. The amount of *conceptual resources* that are needed both in the creation and the recognition of an entity (i.e. creating and understanding the status function of "boarder" or "leader" is in some sense "easier" then manipulate financial products);

3. The *amount* (and possibly the different kinds) *of deontic powers* associated to the entity (i.e. even if you consider the realm of legal institutions you will have different amounts of powers between a traffic assistant and a president; if you consider friendship as part of social ontology, you may want to claim it is different from statutory laws, etc).

Concerning the first parameter –*materiality* – and our area of application (social ontology) I think we can distinguish between concrete, freestanding and ideal objects[2]

For *conceptual resources* I will distinguish low, mid and high. Low is what you need to understand the objects involved in brute facts such as potatoes in the Anscombe example[3] or the stone in the kicking a stone; mid is what we usually have in social facts or joint activities such as going for a walk, playing a game and maybe friendship; high is the level of complex and formalized institutions such as the Supreme Court or the IMF.[4]

The same goes for deontic powers in which I distinguish low, mid and high. Low (or zero) is what you have in brute facts; mid is for the social facts or joint activities (if you play in defense in a game you have some deontic powers associated to the fact that, in the game, you ought to avoid that the other team scores points; if you receive a mail there are deontic powers suggesting you to answer and so on); high is for complex institution in which there is a recognized authority issuing the permission and executing the sanctions in case of violation.

This allows us to plot a graph for each entity using the following table that, once filled, will tell us the three parameters of the entity under consideration:

		Category	
Materiality	concrete	freestanding	ideal
Cognitive resources	low	mid	high
Deontic powers	low	mid	high

Such a table offers 27 combinations under which we can classify the social world we have produced using cognitive causal chains.

[2] You can have a better taxonomy, I know that both material and abstract objects have lots of different ontological proposals. I think this quite easy setting allows us to discuss the specific ontological problems of social ontology (i.e. brute facts vs. institutional; freestanding Y-terms; the ontological status of legal norms and entities like promises).

[3] Anscombe (1958).

[4] Again, filling exactly the chart is problematic. There can be games as complex as formal legal institutions, you may want to say friendship is an institution and even that there are brute facts that are really demanding to be understood (rainbows, maybe).

I think that 27 combinations will be enough for the descriptive part of a social ontology. The next step and challenge to prescriptive ontology is to try to figure out if all the 27 combinations are meaningful: is it possible to have an ideal object with low demanding cognitive resources? Can we establish a connection between the degree of deontic powers and the degree of cognitive resources needed to grasp the entity (i.e. can we have high deontic powers with low cognitive resources employment)?

The provided framework enables us also to track the development of social entities through time: all we need to do is to collect the data and build repeated graphs for the same entity at different times. This gives dyachronicity to our system: if a line of stones is no longer a border we will see a shift from high deontic powers to low (zero) in going from a graph to another.

The next challenge, is the one of identifying the regularities and proposing different types of social entities according to the mixture of the parameters. In that case, instead of "entity" in the upper table line we will have the name of a category of social entity and, below, you will have its characteristics spelt out.

		Category	
Materiality	concrete	freestanding	ideal
Cognitive resources	low	mid	high
Deontic powers	low	mid	high

So we might have a category for highly material entities, deontic and another one for conceptual, almost immaterial and without powers, conceptually spontaneous, emergent entities and so on. We may try to label them, for example, the *concrete-high-high* combination might be "iconic social objects" like a crown or a wedding ring and the *ideal-low-low* one "social practices" like friendship or playing children's game that have no formal rules.

The last and more general problem is that, to be fully articulated, my proposal presupposes that we are able to measure cognitive capacities and deontic powers. One chance could be to have a common digital framework (a program language) in which we are able to describe, using a program, all the functions and relationships between the entities and the associated deontic powers. Once this is done, we can compare different programs length corresponding to different objects and then we have a way to rank different entities that could be filled into the categories. Anyway, to fully meet Sperber's challenge, a lot of research is still needed.

Riferimenti bibliografici

Anscombe, G. (1958). On brute facts. *Analysis*. 106

Searle, J. (2010). *Making the world social. The structure of human civilization*. Oxford University Press. 1

Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

VERITÀ E GIUSTIFICAZIONE DEGLI ASSERTI TEMPORALI

Matteo Pascucci

ABSTRACT. Il rapporto tra verità e temporalità, discusso dai pensatori antichi e medievali, è tornato centrale nell'indagine logica solo negli ultimi decenni, dopo essere stato a lungo eclissato dalla volontà di "detemporalizzare" lo studio del ragionamento formale. In queste pagine cercheremo di analizzare alcuni aspetti logici e filosofici della questione, organizzando il lavoro in tre parti. La prima parte è dedicata al trattamento di elementari nozioni di tempo nei sistemi formali, con particolare attenzione per le proposte avanzate alla metà del secolo scorso da Arthur Norman Prior. La seconda parte riguarda alcuni problemi dovuti all'uso di una semantica bivalente per gli asserti temporali: l'esigenza di chiarificare la teoria corrispondentista della verità e il superamento dello scoglio del determinismo. Nella terza parte, infine, ci concentreremo su approcci semantici alternativi: le logiche a più valori (Łukasiewicz, Prior), il metodo delle supervalutazioni (Thomason, Van Fraassen) e le idee giustificazioniste (Dummett). Vedremo che questi approcci forniscono spunti interessanti per un trattamento unitario delle nozioni temporali e modali.

KEYWORDS. Asserti temporali, Prior, Van Fraassen, Semantica.

AUTORE. Matteo Pascucci. mttps@libero.it

RICEVUTO. 28 agosto 2011 **ACCETTATO**. 20 settembre 2011

1 Formalizzare nozioni temporali

Vi sono diversi modi di trattare le nozioni di tempo all'interno di un linguaggio formale. La soluzione più immediata è che tali nozioni siano già parte del contenuto espresso da una costante proposizionale. Secondo una prospettiva del genere, quando utilizziamo un'espressione ben formata φ possiamo riferirci arbitrariamente ad una situazione presente, passata o futura. Ad esempio:

$p =$ "piove ora"

$q =$ "pioverà tra un minuto"

$p \vee q$= "piove ora o pioverà tra un minuto".

Questo approccio risulta poco soddisfacente, perché per ciascuno *schema di enunciato* come "piove. . . " dobbiamo utilizzare più di una costante, una per ogni differente riferimento temporale; così, il numero delle costanti chiamate in gioco rischia di essere enorme.

Un secondo approccio, più proficuo, consiste nel focalizzare l'attenzione proprio sugli schemi di enunciato: ogni schema di enunciato rappresenta una situazione-tipo. Ciò che conta è che un simbolo riesca a catturare il contenuto di un particolare genere di accadimento: utilizziamo allora una sola costante per esprimere ciascuna situazione-tipo e poi arricchiamo il linguaggio con operatori che collocano tali situazioni in differenti regioni temporali.[1] Indicazioni in questo senso sono rintracciabili nei testi di Prior, che, a partire da *Time and Modality*, utilizza un operatore enunciativo per il tempo passato e uno per il tempo futuro:[2]

$p =$ "piove"

$Pp =$ "si diede il caso che p" = "piovve"

$Fp =$ "si darà il caso che p" = "pioverà"

Riusciamo così a distinguere tre classi di situazioni: quelle che sussistono, quelle che sono accadute e quelle che avverranno. L'uso di un operatore per il presente è ridondante, perché le condizioni di verità di p sono le stesse di "si dà il caso che p": se un operatore del genere fosse inserito nel linguaggio, sarebbe agevolmente eliminato tramite una catena di equivalenze. [3]

La nostra notazione risulta ancora troppo povera, perché non consente di far riferimento a momenti specifici all'interno di una regione temporale. Consideriamo il caso di eventi relativi al passato: come rappresentare il significato degli enunciati "piovve ieri" e "piovve due giorni fa"? L'operatore monadico P (così denominato da Prior perché viene applicato ad un unico argomento, una proposizione φ di complessità arbitraria) consente di formalizzare solamente l'idea che c'è stato un momento del passato in cui si è verificato l'evento di una pioggia; dunque, si comporta come un quantificatore esistenziale su istanti di tempo. Per comprendere meglio questo punto, traduciamo l'enunciato Pp nel linguaggio della logica del primo ordine, introducendo un dominio di intervalli temporali T, una costante per il tempo presente t_0,una relazione di precedenza temporale $<$ (caratterizzata in base ad opportune proprietà) e una relazione di occorrenza $AT(x, \varphi)$, secondo cui la situazione φ occorre al tempo x:[4]

$Pp \equiv \exists t \in T(t < t_0 \;\&\; AT(t, p)) =$ "esiste un intervallo di tempo che cade nel passato e in cui piove"

[1] La stessa cosa può esser fatta in relazione alle coordinate spaziali, dalla cui analisi scegliamo di prescindere.
[2] Cfr. (Prior, 1957, p.8).
[3] Poniamo che l'operatore per il tempo presente sia N. Otteniamo: $Np = p$, $FNp = Fp$, $PNp = Pp$, ecc.
[4] Nel nuovo linguaggio la proposizione p denota un evento, anziché di un valore di verità.

Si intuisce che gli enunciati considerati sopra, "piovve ieri" e "piovve due giorni fa", hanno condizioni di verità diverse, sia tra loro, sia rispetto alla formalizzazione che ne abbiamo fornito; pertanto, devono essere trattati in modo differente.

Un altro problema per gli operatori P ed F emerge dagli studi linguistici sulle analogie tra pronomi deittici e tempi verbali:[5] come formalizzare una frase che fa riferimento ad uno specifico momento del passato o del futuro, ricavabile dal contesto extralinguistico? Se prendiamo in esame la frase "non ho spento la stufa", sappiamo che riguarda il passato e che rappresenta la negazione di un evento, lo spegnimento della stufa da parte mia. Per trasformare in forma logica l'enunciato, possiamo applicare la negazione prima o dopo l'operatore di tempo passato, ottenendo rispettivamente $\sim Ps$ (non si è dato il caso che ho spento la stufa) e $P \sim s$ (si è dato il caso che non ho spento la stufa). Traducendo le due formule nel linguaggio del primo ordine che abbiamo adottato sopra, rendiamo esplicite le difficoltà:

$\sim \exists t(t < t_0 \ \& \ AT(t, s)) =$ "non esiste un intervallo (istante) di tempo passato in cui ho spento la stufa"

$\exists t(t < t_0 \ \& \ AT(t, \sim s)) =$ "esiste un intervallo (istante) di tempo passato in cui non ho spento la stufa"

Entrambe le formalizzazioni sono insoddisfacenti, perché la prima non rende conto della possibilità che io mi sia ricordato di spegnere la stufa in altre circostanze, mentre la seconda è banalmente vera, poiché dice che ci sono degli istanti del tempo trascorso in cui non mi sono dedicato all'attività di spegnere la stufa.

La strategia più immediata per risolvere il problema è di tipo pragmatico: restringiamo il dominio T degli istanti su cui avviene la quantificazione (ad esempio, specificando che ogni istante debba essere compreso nell'arco temporale che identifichiamo con l'espressione "questa mattina"). Una soluzione alternativa può essere costruita a partire dai testi di Prior: egli menziona *operatori metrici* (o diadici) $P_x\varphi$ e $F_x\varphi$, che prendono come primo argomento un istante/intervallo di tempo e come secondo argomento un enunciato.[6] Così, la frase problematica sullo spegnimento della stufa viene formalizzata in modo più preciso:

$P_n \sim s =$ "si dà il caso che n intervalli di tempo fa io non ho spento la stufa"

$\sim P_n s =$ "non si dà il caso che n intervalli di tempo fa io ho spento la stufa"

Se forniamo un'unità di misura per gli intervalli temporali e calcoliamo il valore di n in base al contesto in cui l'enunciato viene proferito, otteniamo una buona formalizzazione, cioè una formula che preserva le condizioni di verità dell'enunciato espresso in linguaggio naturale. Ad esempio, se assumiamo come unità di misura per gli intervalli temporali un'ora e ricaviamo dal contesto che chi pronuncia la frase è uscito di casa due ore prima, possiamo rappresentare il suo pensiero come segue:

$P_2 \sim s = \sim P_2 s =$ "due ore fa non ho spento la stufa"

In questa prospettiva le flessioni dei verbi, gli avverbi di tempo e tutte le altre indicazioni temporali presenti nel linguaggio naturale sono sempre assorbite dall'operatore diadico. Ciò che viene posto al centro dell'attenzione è l'analisi delle condizioni di verità di un enunciato, non le caratteristiche o la struttura interna degli eventi cui si fa riferimento nell'enunciato. Tuttavia, questo non vuol dire che sia preclusa la possibilità di catturare più in dettaglio alcune informazioni, come le relazioni stabilite dai diversi tempi verbali. L'approccio in esame,

[5] Cfr. (Partee, 1973).
[6] Cfr. (Prior, 1957, p.11).

infatti, permette di distinguere un tempo dell'enunciazione, un tempo del riferimento e un tempo dell'evento, in accordo con l'analisi dei tempi verbali suggerita da Hans Reichenbach.[7] L'idea è che gli operatori temporali metrici vengano iterati e ciascuna occorrenza renda conto di una coordinata temporale diversa. Vediamo come questo accade in tre esempi:

$P_nP_mp =$ "n intervalli di tempo fa si diede il caso che m intervalli di tempo prima p" $=$ "aveva piovuto"

$F_nP_mp =$ "tra n intervalli di tempo si darà il caso che m intervalli di tempo prima p" = "avrà piovuto"

$P_nF_mp =$ "n intervalli di tempo fa si diede il caso che m intervalli di tempo dopo p" = "avrebbe piovuto"

Nel primo esempio abbiamo formalizzato le relazioni temporali caratteristiche del trapassato prossimo, nel secondo quelle del futuro anteriore, nel terzo quelle del condizionale passato. Si osserva facilmente che in tutte le formule considerate sono presenti due informazioni temporali: una è data dall'operatore più esterno (con pedice n) e rappresenta il tempo di riferimento, ovvero il tempo in cui si valuta l'enunciato, l'altra è data dall'operatore più interno (con pedice m) e rappresenta il tempo dell'evento; per quanto riguarda il tempo di enunciazione, invece, esso deve essere ricavato dal contesto.

Occorre tener presente che non è sempre intuitivo il modo in cui vengono usati gli operatori metrici. Prendiamo una frase come "ieri sera Beatrice ha cenato e poi è andata a dormire": essa presenta due eventi di cui Beatrice è protagonista e che sono posti in una certa relazione di precedenza temporale. Nel tentativo di formalizzare l'enunciato siamo liberi di scegliere l'unità di misura che preferiamo, ma il risultato ottenuto non è mai pienamente convincente:

$p =$ "Beatrice cena"

$q =$ "Beatrice va a dormire"

$P_1p \;\&\; P_1q =$ "un giorno fa Beatrice ha cenato e un giorno fa Beatrice è andata a dormire"

$P_14p \;\&\; P_12q =$ "14 ore fa Beatrice ha cenato e 12 ore fa Beatrice è andata a dormire"

La prima formalizzazione non riesce a dar conto dell'ordine degli eventi, la seconda è troppo macchinosa. Tuttavia, la seconda formalizzazione è corretta, perlomeno dal punto di vista delle condizioni di verità; inoltre, se in un certo contesto non sono ricavabili gli istanti precisi cui fanno riferimento gli operatori temporali, possiamo sempre limitarci a specificare alcune relazioni che intercorrono tra i loro pedici e aggiungere una relazione di inclusione temporale $\subseteq$, sulla scia della Teoria della Rappresentazione del Discorso.[8] Ad esempio, trattiamo la frase su Beatrice come segue:

$P_np \;\&\; P_mq$ con $n > m$

$[\![p]\!], [\![q]\!] \subseteq [\![ieri]\!]$

$[\![ieri]\!] =$ il giorno che precede oggi

Vediamo che il tempo dell'evento p precede il tempo dell'evento q poiché la sua distanza nel passato è maggiore ed entrambi gli eventi sono inclusi in ciò che è denotato dall'espressione

[7]Cfr. (Reichenbach, 1947). L'approccio di Reichenbach è sicuramente noto a Prior, come testimonia, ad esempio, la sezione di Past, Present and Future dedicata al modo in cui il filosofo tedesco intende la nozione di presente e distingue il tempo dell'enunciazione dal tempo del riferimento (cfr. (Prior, 1967, pp. 12-15)).

[8]Cfr. (Kamp, 1981).

"ieri". Assumiamo che una soluzione di quest'ultimo tipo sia sempre possibile per enunciati che forniscono indicazioni temporali generiche. In definitiva, l'uso di operatori temporali metrici, insieme alle accortezze che abbiamo visto, risulta sufficiente per la nostra indagine, benché approcci alternativi (la stessa Teoria della Rappresentazione del Discorso, la semantica degli eventi di Davidson[9] o Parsons[10], etc.) presentino vantaggi notevoli ad altri livelli di analisi.

2 Principio di bivalenza e metafisica del tempo

Secondo il principio di bivalenza, ogni enunciato è vero o falso. In un sistema formale che intenda rappresentare le coordinate temporali in base alle indicazioni di Prior, tale principio può essere riformulato come *bivalenza locale*,[11] cioè bivalenza relativa ad un certo istante:

$[\![\varphi]\!]_t = 1$ o $[\![\varphi]\!]_t = 0$

per ogni enunciato φ e ogni istante di tempo t, φ è vero in t o φ è falso in t

Pertanto, enunciati quali "domani pioverà", "ieri piovve", "tra due giorni avrà piovuto", ecc. risultano veri o falsi al momento in cui sono pronunciati, anche se il tempo di riferimento e il tempo dell'evento non coincidono con quello dell'enunciazione. Le conseguenze di un'assunzione del genere non sono affatto di poco conto. La prima questione da chiarire, di natura epistemologica, è che quando le condizioni per la valutazione di un enunciato non sono contemporanee al proferimento dell'enunciato, non è semplice giustificare la *teoria corrispondentista* della verità e, in particolare, le equivalenze di Tarski: "φ" è vero sse φ. Nella versione tradizionale, infatti, l'idea della verità come corrispondenza è che un enunciato risulta vero solo se c'è un fatto nel mondo che corrisponde al pensiero espresso. Ebbene, quale può essere adesso il fatto nel mondo corrispondente all'enunciato "domani pioverà"? L'unica via d'uscita è affermare che nelle equivalenze tarskiane il verbo essere ha un valore sovratemporale. In questo modo, le condizioni di verità possono essere successive o precedenti rispetto all'enunciazione senza che venga meno il criterio di corrispondenza.

Tuttavia, rimane un problema di fondo, quello del determinismo. Se da un lato la bivalenza locale permette di rappresentare un tratto condivisibile dell'idea di tempo, cioè la determinatezza del passato, dall'altro essa comporta la simmetrica determinatezza del futuro, su cui è legittimo protestare. Per il principio di bivalenza locale, se consideriamo le formule $P_n\varphi$ e $F_n\varphi$ abbiamo che:

$[\![P_n\varphi]\!]_t = 1$ o $[\![P_n\varphi]\!]_t = 0$

$[\![F_n\varphi]\!]_t = 1$ o $[\![F_n\varphi]\!]_t = 0$

La determinatezza del passato corrisponde alla tesi seguente, che dipende dal modo in cui sono stati definiti gli operatori temporali e dalla bivalenza:

$\varphi \rightarrow F_nP_n\varphi$ = "se φ, allora n intervalli di tempo dopo è vero che n intervalli di tempo prima φ"

La persistenza degli eventi è una caratteristica del tempo che ammettono tutti i sostenitori della realtà del passato: se una situazione si verifica in un certo istante, allora si darà il caso

[9] Cfr. (Davidson, 1980).
[10] Cfr. (Parsons, 1990).
[11] Così viene definito in (Bonomi, 1980).

per tutti gli istanti successivi che essa si è verificata in quell'istante. Sono pochi i sostenitori di metafisiche del tempo in cui la verità di un fatto accaduto può esser negata successivamente, perché tali visioni risultano fortemente contrarie al buon senso. Un esempio di metafisica antirealista sul passato è il *presentismo*: esiste soltanto ciò che accade nel presente, il passato non esiste più e il futuro non esiste ancora.[12] Il problema, è che il presente non ha durata, è un mero confine tra due regioni; quindi, perché esista, devono esistere anche le regioni di cui è confine. Un altro esempio è la posizione che possiamo definire *verificazionismo radicale*, secondo cui il passato esiste solo se ve n'è traccia nel presente: tutto ciò che è stato ma non può più essere verificato non è reale. A differenza del presentismo, il verificazionismo radicale non esclude la realtà del futuro, in base all'*argomento dell'accessibilità*:[13]

- tutto ciò che è reale è anche accessibile;
- tutto ciò che sarà è ancora accessibile in linea di principio;
- tutto ciò che è stato non è più accessibile in modo diretto (lo è solo, eventualmente, tramite tracce che si sono conservate, compresi i ricordi);
- il futuro è sicuramente reale, mentre il passato lo è solo per alcuni aspetti accessibili.

La debolezza di questa visione del tempo risiede nel collegamento tra i valori di verità degli enunciati. Se ammettiamo che il presente è reale, qualunque enunciato del tipo "φ sta accadendo" è vero o falso; si tratta, infatti, di un enunciato al presente, quindi denota uno stato di cose accessibile oppure non denota nulla. Consideriamo la situazione in cui, un'ora di tempo dopo aver pronunciato un enunciato del genere, ci sia un'amnesia generale e qualcuno chieda se è vero che "φ è accaduto un'ora fa". Non ci sono testimonianze o ricordi riguardo il fatto rappresentato da φ: siamo costretti a dire, allora, che tale enunciato è né vero né falso. Ma se il nostro interlocutore chiedesse se era vero un'ora fa l'enunciato "φ sta accadendo", dovremmo rispondere che è indeterminato? Ecco il punto critico: non è legittimo asserire che adesso l'enunciato che non ci ricordiamo di aver pronunciato un'ora fa è né vero né falso, mentre era determinatamente vero o falso al momento in cui l'abbiamo pronunciato.

Tornando ai problemi di bivalenza, osserviamo che la determinatezza del futuro si ottiene quando vale l'implicazione seguente:

> $\varphi \to P_n F_n \varphi =$ "se φ, allora n intervalli di tempo prima è vero che n intervalli di tempo dopo φ"

Ammettendo questa formula, infatti, sottoscriviamo la tesi che il futuro è esistente, perché tutto quello che accadrà un giorno risulta vero adesso, quindi inevitabile. La questione del rapporto tra bivalenza ed enunciati al futuro è stato sollevato per la prima volta da Aristotele nel *De Interpretatione*: se qualcuno dice che domani ci sarà una battaglia navale e qualcun altro obietta che domani non ci sarà una battaglia navale, il principio di bivalenza impone di riconoscere che uno dei due sta dicendo il vero e l'altro il falso, poiché le proposizioni asserite sono contraddittorie. Tuttavia, secondo l'opinione comune, il futuro non è ancora reale, a differenza del passato, perché se lo fosse noi avremmo la possibilità, *in linea di principio*, di conoscere adesso quali asserti futuri sono veri e quali falsi, ma questa possibilità ci è

[12]Sembra che tale visione sia stata difesa da Agostino e Hobbes. Il primo, nel libro XI delle Confessioni, afferma che "né futuro né passato esistono e solo impropriamente si dice che i tempi sono tre: passato, presente e futuro"; il secondo, nel libro I del Leviatano, scrive che "solo il presente esiste in natura: gli eventi passati esistono solo nella memoria, ma gli eventi futuri non esistono affatto".

[13]Cfr. (Dummett, 2006).

solitamente preclusa.[14] Consideriamo ad esempio gli enunciati "ieri nel mio giardino sono passati tre gatti" e "domani nel mio giardino passeranno tre gatti": poniamo che per entrambi non abbiamo argomenti che permettano di decidere il valore di verità. Tuttavia, per il primo è lecito immaginare che salti fuori, inaspettatamente, una testimonianza di qualcuno che ha osservato il giardino nel corso della giornata, oppure un documento preso da una telecamera a circuito chiuso che non sapevamo si trovasse proprio di fronte al giardino. Questa è una possibilità che, *in linea di principio*, dobbiamo sempre considerare per gli eventi al passato, mentre non è disponibile per gli eventi al futuro; ciò mette in luce la differenza nella realtà che ascriviamo alle due regioni temporali. Come ha osservato Michael Dummett, chi si oppone al fatalismo ritiene che, «per quanto alta sia la probabilità di qualche nostra credenza sul futuro, quella credenza non può essere conoscenza, perché, finché la credenza continua ad essere sul futuro, rimarrà sempre aperta la possibilità che sia smentita».[15]

Nel presente siamo giustificati ad asserire sul futuro che tra due proposizioni contraddittorie se ne verificherà una sola, ma non possiamo specificare quale delle due si verificherà. In altre parole, è vero l'enunciato $F_n\varphi \vee \sim F_n\varphi$, mentre non è vero nessuno dei due disgiunti. Un argomento del genere è presentato da Prior in *Time and Modality* ed è stato chiamato da Bonomi e Del Prete "paradosso della scelta multipla".[16] Immaginiamo una situazione in cui due individui A e B sono spinti verso l'orlo di un precipizio: sappiamo che questa spinta continuerà fino a quando rimarrà spazio per un solo individuo. Succederà sicuramente che A cadrà oppure B cadrà, ma non è sicuro né che cadrà A né che cadrà B. In tali situazioni, secondo Prior, siamo costretti ad assegnare agli enunciati "cadrà A" e "cadrà B" un terzo valore di verità, il valore neutro. Questi enunciati diverranno veri o falsi soltanto in futuro, quando si presenterà la situazione di cui parlano.

3 Semantiche non bivalenti

L'idea di una semantica a più valori di verità è stata sviluppata per la prima volta da Jan Łukasiewicz nel XX secolo, ma risulta in qualche modo anticipata da Aristotele nel discutere il problema della battaglia navale. Il filosofo di Stagira, infatti, affermava che il futuro esiste soltanto in potenza e che su di esso non possono essere applicati quei principi, come la bivalenza, che valgono per ciò che è in atto. Łukasiewicz, in accordo con questa tesi, propone di assegnare agli enunciati possibili, né veri né falsi, il valore di verità. Successivamente, egli elabora sistemi con un numero finito arbitrariamente grande o con un numero infinito contabile di valori di verità. Il problema dei sistemi di Łukasiewicz, però, è che le tautologie classiche possono essere invalidate.

Le semantiche a più valori sono alla base del tentativo di Prior di costruire un sistema per la logica temporale. In Time and Modality, egli considera ogni enunciato come una funzione da istanti a valori di verità; perciò, la denotazione di un enunciato risulta essere una lista di valori di verità, uno per ciascun istante:

$$[\![p]\!] = \ldots 0101011100111 \ldots$$

[14] La conoscenza del valore di verità degli asserti al futuro non è preclusa in ogni caso, ma non è disponibile in generale. La verità o falsità di asserti al futuro dimostrabili mediante calcoli, ad esempio, è conoscibile in anticipo. L'enunciato "domani ci sarà un'eclissi lunare" è vero o falso già adesso, in base a misurazioni sui movimenti dei pianeti: per valutare l'enunciato non occorre attendere il momento cui esso si riferisce.

[15] (Dummett, 2006). Il discorso di Dummett dovrebbe essere precisato con le osservazioni della nota precedente.

[16] Cfr. (Prior, 1957, pp. 84-93) e (Bonomi and Del Prete, 2011).

L'idea è che non si possa semplicemente dire di un enunciato che è vero o falso, bensì occorra fare una valutazione continua nel corso del tempo. D'altra parte, Prior mette in corrispondenza ciascuna lista di valori di verità con un *valore complessivo* che la rappresenta: «supponiamo che ci siano soltanto due tempi, oggi e domani. Allora possiamo assegnare ad ogni enunciato uno dei seguenti quattro valori [complessivi]: (1) vero sia oggi sia domani; (2) vero oggi e falso domani; (3) falso oggi e vero domani; e (4) falso sia oggi sia domani». [17] Se rappresentiamo "oggi" come t e "domani" come t', risulta che:

$$[\![p]\!]_{complessivo} = 1 \text{ sse } [\![p]\!]_t = 1 \text{ e } [\![p]\!]_{t'} = 1$$

$$[\![p]\!]_{complessivo} = 2 \text{ sse } [\![p]\!]_t = 1 \text{ e } [\![p]\!]_{t'} = 0$$

$$[\![p]\!]_{complessivo} = 3 \text{ sse } [\![p]\!]_t = 0 \text{ e } [\![p]\!]_{t'} = 1$$

$$[\![p]\!]_{complessivo} = 4 \text{ sse } [\![p]\!]_t = 0 \text{ e } [\![p]\!]_{t'} = 0$$

In generale, dato un insieme di istanti $T = \{t_0, \ldots, t_n\}$ e un enunciato φ, l'insieme dei valori di verità complessivi attribuibili a φ ha cardinalità uguale a $|T|^2$. Nel nostro caso, gli istanti sono due e i valori complessivi quattro, cioè 2^2.

L'uso delle liste di valori è significativo, perché consente di intrecciare il trattamento del tempo con quello delle *modalità*: ad un istante t un enunciato φ risulta inevitabile (cioè necessario) sse è vero per tutti gli istanti a partire da t,[18] realizzabile sse c'è qualche istante a partire da t in cui è vero e irrealizzabile sse non c'è nemmeno un istante a partire da t in cui è vero. Ponendo che $L\varphi$ stia per "necessariamente φ" e $M\varphi$ stia per "possibilmente φ", le rispettive valutazioni sono:

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
$[\![\varphi]\!]$	0	1	0	1	1	0	0	1	1
$[\![L\varphi]\!]$	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$[\![M\varphi]\!]$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Bisogna tenere presente che le modalità considerate nella logica a più valori di Prior sono di tipo particolare, perché corrispondono a quantificazioni su istanti:

$$[\![L\varphi]\!]_t = 1 \text{ sse } [\![\varphi]\!]_{t'} = 1 \text{ per ciascun } t' \geq t$$

$$[\![M\varphi]\!]_t = 1 \text{ sse } [\![\varphi]\!]_{t'} = 1 \text{ per almeno un } t' \geq t$$

Tali modalità sono utili nella definizione di enunciati tautologici (sempre veri) ed enunciati contingenti (a volte veri), ma non esauriscono il senso in cui si può parlare di necessità e possibilità. Infatti, spesso usiamo le nozioni modali in relazione ad uno specifico intervallo di tempo: "è possibile che tra un'ora piova", "è necessario che domani sorga il sole", ecc.

[17](Prior, 1957, p.15), trad. mia. In realtà, come abbiamo visto per Łukasiewicz, anche nel sistema Q di Prior un enunciato può avere in alcuni istanti un valore di verità diverso dal vero e dal falso, perché semplicemente non ha senso che sia valutato in quegli istanti. Un esempio del genere è "Se Gottlob Frege è un logico, allora è un logico" valutato in relazione ad un istante di tempo che precede la nascita di Frege. Inoltre, questo approccio assume che i portatori di verità siano enunciati e non pensieri o, come avrebbe detto Wittgenstein, proposizioni. Nel *Tractatus Logico-philosophicus* (Wittgenstein, 1968), una proposizione è l'immagine logicamente strutturata di uno stato di cose. Enunciati emessi in circostanze diverse rappresentano immagini del mondo diverse; pertanto, allo stesso enunciato possono corrispondere più proposizioni ed è solo per questo motivo che il suo valore di verità cambia col contesto.

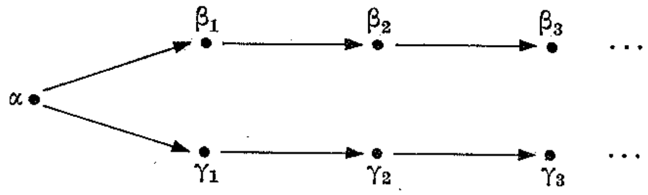
[18]L'istante t è compreso quando si valuta il futuro a partire da t, quindi si tiene conto anche della situazione presente.

Un trattamento più ampio delle modalità all'interno di un sistema di logica temporale richiede un approccio semantico diverso, che procede dall'analisi del celebre "argomento dominatore" di Diodoro Crono, filosofo di scuola megarica vissuto tra IV e III secolo a.C. L'argomento in questione è interpretato dai più come una tesi fatalista, perché difende l'identità delle nozioni di "possibile" e "necessario". La strategia usata da Diodoro è mostrare l'incompatibilità di tre asserzioni sottoscritte dagli indeterministi, cioè da coloro che negano l'identità delle due nozioni modali:

- tutti gli enunciati veri concernenti il passato sono inevitabilmente veri;
- l'impossibile non deriva dal possibile;
- qualcosa che non si verifica e non si verificherà in futuro è comunque possibile.

Diodoro ritiene che debba essere scartata la terza affermazione: è possibile soltanto ciò che prima o poi si realizza, non esiste una possibilità in linea di principio, cioè svincolata dai fatti. Se il passato è necessario, allora tutto ciò che non si è verificato è impossibile; inoltre, poiché l'impossibile non proviene dal possibile (sono contraddittori), se qualcosa non si verifica ad un certo momento non era possibile prima di quel momento; pertanto, tutto ciò che non si verifica è da sempre impossibile. Altri filosofi antichi optavano per soluzioni diverse: Cleante per la negazione della prima tesi, Crisippo rifiutava la seconda.

La ricerca di sistemi per le modalità di Diodoro è stato uno dei principali stimoli per il lavoro di Prior e molti altri logici. Per confutare l'"argomento dominatore" occorre una rappresentazione non lineare del tempo, che garantisca l'asimmetria tra passato e futuro: in *Past, Present and Future* Prior sviluppa l'idea che il tempo sia come un albero ramificato verso il futuro ma non verso il passato, perché solo il futuro contiene possibilità ancora aperte. Su questa visione del tempo è basato il lavoro di Richmond Thomason[19]. Egli considera un insieme parzialmente ordinato di istanti, tale che ciascun istante fa parte di almeno un decorso temporale possibile (un sottoinsieme linearmente ordinato e massimale). Ad ogni nodo dell'albero, i rami che procedono in avanti rappresentano alternative per il futuro.



Consideriamo in questo modello un enunciato al futuro formulato nell'istante α: "domani pioverà". Traduciamo tale enunciato in notazione prioriana assumendo come unità di misura della distanza temporale un giorno: F_1p. Vi sono due decorsi possibili per il futuro a partire dall'istante α, chiamiamoli H e K. Vediamo che $H = \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\}$ e $K = \{\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots\}$. Ponendo che istanti appartenenti a decorsi diversi ma aventi lo stesso indice siano sincronici, o meglio che rappresentino due possibilità per lo stesso istante di tempo, abbiamo che l'enunciato proferito ad α si riferisce ai due possibili scenari per il giorno successivo, cioè β_1 e γ_1. Introduciamo una valutazione per l'enunciato relativa ad un certo decorso:

$$[\![F_1p]\!]^H_\alpha = 1 \text{ sse } [\![p]\!]_{\beta_1} = 1$$
$$[\![F_1p]\!]^K_\alpha = 1 \text{ sse } [\![p]\!]_{\gamma_1} = 1$$

[19](Thomason, 1970).

A questo punto l'approccio di Thomason si appella al metodo delle supervalutazioni di Van Fraassen[20]: oltre alla valutazione relativa ad un decorso possibile, aggiungiamo una supervalutazione relativa a tutti i decorsi possibili. Intuitivamente, la supervalutazione di un enunciato al futuro proferito ad un istante α corrisponde alla necessità, contingenza o impossibilità che l'enunciato sia vero in un momento successivo ad α. In dettaglio, la supervalutazione di "domani pioverà" ad α è uguale a 1 sse l'enunciato è vero in ogni decorso futuro, è uguale a 0 sse l'enunciato è falso in ogni decorso futuro. La supervalutazione è né vera né falsa quando l'enunciato ha valori di verità diversi nei vari decorsi. L'assunzione del metodo delle supervalutazioni è che per ogni nodo del ramo, corrispondente ad un istante, tutte le formule non contenenti un operatore di tempo futuro siano valutabili in modo bivalente. Notiamo che la bivalenza sopravvive a livello delle valutazioni relative, ma non a livello delle supervalutazioni.

L'ultimo approccio che prendiamo in esame è quello giustificazionista, sviluppato recentemente da Michael Dummett. Precisiamo subito che la semantica del tempo di Dummett non ha ancora avuto una formalizzazione rigorosa, quindi si tratta di un ambito di ricerca aperto. Secondo il giustificazionismo (o verificazionismo) in filosofia del linguaggio, di cui Dummett è attualmente il maggiore esponente, il significato di un enunciato è dato dalle condizioni di asseribilità. Questa tesi raccoglie idee da tradizioni di pensiero diverse: la matematica intuizionista di Brouwer e Heyting, la spiegazione del significato delle costanti logiche data da Gentzen in deduzione naturale e lo slogan del secondo Wittgenstein "significato come uso". Dal punto di vista logico, il giustificazionismo rifiuta il principio di bivalenza (e la legge del terzo escluso, che ne è la traduzione nel linguaggio formale): un enunciato è vero sse è verificabile, falso sse è refutabile. Tutte le verità logico-matematiche devono essere ottenute mediante una dimostrazione costruttiva (cioè che non si avvalga del metodo di riduzione ad assurdo), tutte le verità empiriche devono essere riconducibili ad evidenze immediate da parte di qualcuno.[21]

Per un giustificazionista gli asserti temporali rappresentano una classe di enunciati problematici. In una prima fase di pensiero, Dummett ha sostenuto una tesi radicale: tutto ciò che riguarda regioni inaccessibili dello spazio-tempo non è verificabile, quindi risulta né vero né falso. Le sole descrizioni del mondo che siamo autorizzati a fare sono collocate nel presente. Il problema di questa posizione è, come abbiamo osservato sopra, che ad esser privi di valore di verità non sono solo gli enunciati al futuro, ma anche molti di quelli al passato; infatti, qualora non vi siano tracce nel presente di ciò che è stato, non possiamo affermare nulla con certezza. Evidentemente, per il giustificazionista il problema di garantire la realtà del passato è una questione di buon senso, più che di coerenza. La strategia utilizzata da Dummett contro questa difficoltà è di introdurre una nozione di *verificabilità in linea di principio*:[22] anche se non sono più disponibili prove per un asserto al passato, possiamo comunque immaginare un agente opportunamente collocato nella regione dello spazio-tempo cui l'enunciato si riferisce ed assegnare a questo soggetto la capacità di decidere la verità o la falsità

[20](Van Fraassen, 1966).

[21]In molte circostanze questo vuol dire che c'è una catena di prove indirette che termina con una prova diretta disponibile per qualcuno. Ad esempio, sappiamo che Napoleone fu sconfitto a Waterloo perché lo testimoniano i libri di storia, i quali si basano su certi documenti, che a loro volta sono stati compilati grazie a certe testimonianze, ecc. finché non si arriva all'evidenza immediata di una persona che partecipò alla battaglia.

[22]Tale nozione è rintracciabile anche in alcuni testi di Per Martin-Löf, matematico svedese che ha elaborato la teoria intuizionista dei tipi negli ultimi decenni del secolo scorso. Nella sua prospettiva gli enunciati matematici sono verificabili in linea di principio se esiste per essi una prova, anche se nessuno riuscirà mai a scovarla nel corso del tempo. La verificabilità in linea di principio si distingue dalla semplice verificabilità proprio perché comprende anche prove che non sono conosciute (cfr. (Martin-Löf, 1995) e (Martin-Löf, 1998)).

dell'enunciato. Ciò vuol dire che molte verità sul passato non conoscibili effettivamente, lo sono tuttavia in potenza, perché riguardano avvenimenti reali che un tempo erano aperti alla possibilità di verifica. L'unico inconveniente è che tale possibilità risulta adesso perduta.

Il modo in cui Dummett intreccia le nozioni modali e quelle temporali in *Pensiero e Realtà* ricorda, al di là della particolare visione metafisica, alcune idee sostenute in precedenza dal filosofo americano Charles Sanders Peirce, padre del pragmatismo.[23] Per entrambi il futuro è una dimensione non definita: gli individui che ne fanno parte sono sempre dotati di caratteristiche generiche e mai di caratteristiche specifiche, quindi non sono mai completamente discernibili. Secondo Peirce, gli statistici possono dire *quanti* uomini si suicideranno a New York il prossimo anno, ma non possono dire *quali* uomini si suicideranno.

Il problema della natura degli individui futuri ha rilevanza sul piano formale, quando si cerca di unire i sistemi logici modali con la teoria della quantificazione, e di questo è ben consapevole anche Prior. In *Time and Modality*, egli individua una proposizione, la formula di Ruth Barcan, che non deve essere derivabile all'interno di un sistema di logica temporale, perché attribuisce caratteristiche specifiche ad individui possibili: $M\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists x M\varphi(x)$. Il significato della formula è: se è possibile che qualcuno si trovi in una certa situazione, allora esiste qualcuno che può trovarsi in quella situazione. Ciò vuol dire che qualunque individuo possa esistere, esiste attualmente. Ricordando l'analogia tra le nozioni di "possibile" e "futuro", presentiamo una variante della formula che mette ancora più in risalto i problemi: $F_n\exists x\varphi x \rightarrow \exists x F_n\varphi(x)$. Se tra n giorni qualcuno si troverà in una certa situazione, allora esiste già ora colui che si verrà a trovare in quella situazione tra n giorni. L'obiezione cui l'analisi Prior va incontro è che il quantificatore esistenziale nella formula di Barcan non indica esistenza effettiva, ma soltanto appartenenza al dominio degli individui che hanno popolato, popolano o popoleranno il mondo. Tuttavia, anche in questo modo si afferma che il dominio degli individui è determinato in modo sovratemporale e questo non è compatibile con l'idea di una realtà cumulativa. Nell'ottica giustificazionista, le uniche proprietà che possono essere attribuite ad individui futuri sono quelle definitorie (necessarie), ma nessuna proprietà contingente. Non possono esserci adesso fatti relativi ad individui ancora non esistenti. Si potrebbe replicare che la stesso discorso vale per gli enti che non esistono più, cioè per il passato, ma gli individui passati sono caratterizzabili in modo particolare a differenza di quelli futuri, non sono individui generici.

Dummett ritiene che gli enunciati al futuro siano simili agli asserti su situazioni immaginarie e agli asserti controfattuali, mostrando anche in questo sintonia con il pensiero di Peirce. Secondo il filosofo pragmatista, infatti, quando parliamo di una situazione immaginaria come l'*Amleto* di Shakespeare, la possibilità di attribuire certe caratteristiche ai protagonisti sussiste finché il lavoro di immaginazione dell'autore si è sedimentato in qualche testimonianza. Se ci chiediamo se è vero che Polonio nell'*Amleto* aveva i capelli lunghi 15 cm, non possiamo trovare una risposta. Nelle parole di Dummett: «un autore di storie di finzione non è tenuto a rendere determinato ogni dettaglio del suo mondo immaginario».[24] Il punto è che, sia nel caso del futuro sia in quello delle rappresentazioni fantastiche, non abbiamo a che fare con individui veri e propri, ma con entità essenzialmente incomplete. Riguardo il futuro, dobbiamo allora distinguere due coppie di enunciati, in base all'ambito della negazione: $F_n\varphi$

[23] In *Verità e Passato*, che riguarda una fase successiva della riflessione di Dummett, gli elementi di giustificazionismo nella metafisica del tempo vengono ad essere fortemente ridotti e si indeboliscono le assonanze con Peirce. Preferiamo concentrare l'attenzione sulle tesi esposte in *Pensiero e Realtà*, perché rappresentano una forma di antirealismo più genuina.

[24] (Dummett, 2008, p.108).

e $F_n \sim \varphi$ da un lato e $\sim F_n\varphi$ e $\sim F_n \sim \varphi$ dall'altro. La prima coppia è falsa nel presente perché il futuro è aperto, mentre la seconda coppia è vera perché suggerisce che per il momento nessuna delle due alternative si realizzerà sicuramente. La stessa cosa vale per il discorso dell'*Amleto* di Shakespeare: non si dà il caso che Polonio abbia i capelli lunghi 15 cm e non si dà neppure il caso che Polonio non abbia i capelli lunghi 15 cm.

Venendo infine agli enunciati controfattuali, essi rappresentano conseguenze di situazioni che non sono accadute o non stanno accedendo: «siamo spesso spinti a domandarci cosa sarebbe successo se, in un momento di svolta nelle nostre vite, avessimo preso una decisione diversa; ma la riflessione mostra che non occorre che ci sia una risposta definita a questa domanda. Molte circostanze diverse potrebbero aver influito sul risultato, non c'è una singola risposta».[25] Nel mondo reale non vi è un fatto (stato di cose) che corrisponda all'antecedente di un controfattuale, quindi non può essere disponibile una procedura di verifica delle implicazioni di quel fatto, neppure in linea di principio. In definitiva, nella prospettiva giustificazionista, ciò che accomuna controfattuali e contingenti futuri è la indecidibilità attuale, ciò che li differenzia è che per i primi l'indecidibilità rimarrà sempre, per i secondi no.

4 Conclusioni

In primo luogo, abbiamo mostrato che gli strumenti logici forniti da Prior rappresentano una base importante per formalizzare nozioni temporali di natura elementare. Tali strumenti permettono sia di riferirsi ad istanti specifici in una regione temporale, sia di catturare le condizioni di verità dei tempi verbali: in questi aspetti, il lavoro di Prior è stato in gran parte trascurato dalla critica.

In secondo luogo, abbiamo visto che l'immagine deterministica del tempo può essere messa in discussione con approcci che in vari modi indeboliscono il principio di bivalenza. Ognuno di questi approcci presenta pregi e difetti. La logica polivalente di Prior traduce formalmente l'idea di incertezza sul valore di verità di un enunciato, ma si fonda su una metafisica del tempo poco elaborata ed è fortemente limitata nel trattamento delle nozioni modali, poiché identifica la necessità con la verità in ogni momento e la possibilità con la verità in qualche momento. Il metodo delle supervalutazioni presenta un livello di analisi più avanzato e rende esplicita l'idea che la possibilità sia aperta soltanto verso il futuro, non verso il passato; tuttavia, il trattamento dei contingenti futuri è ridotto semplicemente all'assegnazione di un valore di verità arbitrario a ciascun enunciato in un decorso possibile. L'approccio giustificazionista e la riflessione peirceana, di contro, forniscono stimoli filosofici più elaborati e una discussione più ampia del modo in cui le nozioni modali si intrecciano con quelle temporali, ma risultano ancora non praticabili da un punto di vista formale. Successive indagini potrebbero cercare di attenuare gli elementi critici di ciascun approccio e, in particolare, di sviluppare una semantica adeguata per le idee giustificazioniste.

[25](Dummett, 2008, p.100).

Riferimenti bibliografici

Bonomi, A. (1980). Determinismo e semantiche per logiche temporali. In *Atti del Convegno Nazionale di Logica*. Bibliopolis, Napoli. 113

Bonomi, A. and F. Del Prete (2011). Evaluating future-tensed sentences in changing contexts. in fase di pubblicazione. 115

Davidson, D. (1980). *Essays on Actions and Events*. Oxford University Press. 113

Dummett, M. (2006). *Verità e Passato*. Raffaello Cortina Editore, Milano. 114, 115

Dummett, M. (2008). *Pensiero e Realtà*. Il Mulino, Bologna. 119, 120

Kamp, H. (1981). A theory of truth and semantic representation. In J. Groenendijk, T. Janssen, and M. Stokhof (Eds.), *Formal Methods in the Study of Language*, pp. 277–322. Mathematisch Centrum Tracts, Amsterdam. 112

Martin-Löf, P. (1995). Truth and Knowability: on the principles C and K of Michael Dummett. In H. G. Dales and G. Oliveri (Eds.), *Truth in Mathematics*, pp. 105–114. Clarendon Press, Oxford. 118

Martin-Löf, P. (1998). Verificationism then and now. In D. Pauli and et al (Eds.), *The Foundational Debate*, pp. 187–196. Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands. 118

Parsons, T. (1990). *Events in the Semantics of English: a Study in Subatomic Semantics*. MIT Press, Cambridge (Mass.). 113

Partee, B. (1973). Some structural analogies between tenses and pronouns in english. *Journal of Philosophy* (70), pp. 601–609. 111

Prior, A. N. (1957). *Time and Modality*. Clarendon Press, Oxford. 110, 111, 115, 116

Prior, A. N. (1967). *Past, Present and Future*. Clarendon Press, Oxford. 112

Reichenbach, H. (1947). *Elements of Symbolic Logic*. University of California Press, Berkeley. 112

Thomason, R. (1970). Indeterminist time and truth-value gaps. *Theoria 36*, 264–281. 117

Van Fraassen, B. (1966). Singular terms, truth-value gaps and free logic. *Journal of Philosophy* (63), 481–495. 118

Wittgenstein, L. (1968). *Tractatus Logico-philosophicus*. Einaudi, Torino. 116

Peer Review Journal
Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 ⓒ http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

APPLIED ONTOLOGY. AN INTRODUCTION

Katherine Munn, Barry Smith (a cura di)

[Ontos Verlag – Francoforte, 2008]

Emilio M. Sanfilippo

Da circa un ventennio una disciplina filosofica si è infiltrata con una certa destrezza nei dipartimenti universitari non strettamente filosofici, innestando perfino centri di sviluppo e ricerca nei dipartimenti di informatica e biologia. Il carattere esotico di tali studi rende i suoi contenuti non soltanto difficili da cogliere, ma anche non semplici da reperire. Dopotutto, quale potrebbe essere il rapporto tra una disciplina a carattere metafisico, i computer e i nostri geni? *Applied Ontology. An Introduction*[1] è probabilmente una delle migliori introduzioni del momento al problema dell'ontologia applicata, in particolare agli studi di biomedicina. Diversamente da altri testi[2], infatti, *Applied Ontology* non discute del problema ingegneristico dello sviluppo ontologico e si concentra in tutto il suo percorso su alcune questioni filosofiche e biologiche relative al modo in cui l'informazione bio-medica viene organizzata ontologicamente.

Il testo è articolato in tredici capitoli: i primi cinque affrontano questioni generali, dal rapporto tra filosofia e bioinformatica, ad una discussione piuttosto ampia e dettagliata sull'ontologia formale, all'esplicitazione di alcuni assunti logici sviluppati negli studi ontologici. Dal sesto al nono la discussione si focalizza sulla teoria della classificazione, tra cui di particolare interesse è il capitolo ottavo, in cui l'autore riprende il pensiero aristotelico mostrando il modo in cui esso viene utilizzato negli attuali sviluppi ontologici, in primo luogo nella struttura di BFO (*Basic Formal Ontology*). Nel decimo ed undicesimo capitolo la discussione si focalizza sul problema delle relazioni ontologiche tra le entità nel dominio d'indagine considerato, in cui di particolare interesse è il capitolo di Ingvar Johanasson (*Four Kind of "IS A" relation*[3]). Gli ultimi due affrontano questioni più generali, cercando di tirare da una parte le somme del rapporto tra filosofia e bio-informatica (*Bioinformatics and Biological Reality*[4]), dall'altra di discutere il trattamento delle entità temporali in ontologia applicata.

L'ontologia applicata riprende piuttosto fedelmente il significato della disciplina filosofica come "scienza dell'essere", per applicarlo ad un contesto nuovo a siffatte questioni. A partire da un ventennio, infatti, gli "archivisti dell'informazione" hanno cominciato a prendere sempre più coscienza dell'esigenza di integrare semanticamente i dati contenuti nei database

[1](Munn and Smith, 2008).

[2]Altri due volumi importanti tra le pubblicazioni sull'ontologia applicata sono: (Gomez-Pérez et al., 2004), (Staab and Studer, 2009).

[3](Johansson, 2008b).

[4](Johansson, 2008a).

AUTORE. Emilio M. Sanfilippo. emiliosanfilippo@gmail.com

di sistemi informatici, così da organizzare le stesse informazioni attraverso gli stessi standard e potenziare le capacità di rappresentazione dei sistemi stessi. In tal senso, attraverso la nascita dell'ingegneria ontologica gli studiosi si sono impegnati nel costruire una sorta di "esperanto per database", il cui scopo era pensato nel migliorare la compatibilità tra sistemi e il riutilizzo dell'informazione organizzata elettronicamente. Seppur con diverse accezioni il termine "ontologia" si riferisce, infatti, allo studio di che tipo di entità sono presenti nei domini esaminati; allo studio di "cosa c'è" in quelle porzioni di realtà indagate. Ciò non significa, tuttavia, che l'ontologia rappresenti una collezioni di "individui" (particolari, o tokens), piuttosto una collezione formale di "universali" (classi, o tipi). In tal senso, le ontologie fungono da veri e propri integratori semantici tra database.

Nel caso delle ontologie bio-mediche, esse garantiscono una sempre più precisa gestione delle informazioni sul decorso ospedaliero dei pazienti, il che non soltanto supporta medici ed operatori sanitari nella loro esperienza clinica giornaliera, ma assicura ai pazienti stessi un migliore trattamento dei propri dati. Cliniche, ospedali e centri di ricerca di tutto il mondo sono messi nelle condizioni di poter confrontare periodicamente i propri dati, così da allargare il raggio della ricerca e condividere le proprie informazioni con gli altri esperti. Le ontologie sono allora integratori semantici tra database, nel senso che stabiliscono il significato dei termini utilizzati per gestire grandi quantità di informazioni e considerano la realtà come punto di partenza e d'arrivo della loro indagine.

Diversamente da altri testi sull'ontologia applicata, gli autori di *Applied Ontology* prendono in seria considerazione il problema di stabilire qual è il rapporto tra le entità descritte nelle ontologie e la realtà stessa, cioè valutare in che misura le entità descritte sono semplici "giochi concettuali" (rappresentazioni del linguaggio umano), o rappresentazioni della realtà. La "tendenza concettuale" è, secondo Smith, non soltanto inadeguata per la costruzione di ontologie, ma perfino errata da un punto di vista strettamente metafisico. Le ontologie allora vengono considerate come vere e proprie rappresentazioni della realtà (*representational artifacts*), giacché i termini utilizzati si riferiscono non a ciò che gli esseri umani pensano della realtà, ma a ciò che esiste in essa, indipendentemente dal fatto che essa possa essere conosciuta. In tal senso, la scienza gioca un ruolo fondamentale, giacché sono proprio le teorie scientifiche, ad avviso di Smith, a fornire agli ontologi un resoconto della realtà. Tuttavia, dato che nuove evidenze, nuovi metodi d'indagine e nuovi processi sono capaci di portare la comunità scientifica alla revisione delle proprie posizioni e delle proprie teorie, l'approccio alla realtà difeso in *Applied Ontology* viene definito "realismo fallibilista". Con una battuta di spirito, Pierre Grenon spiega siffatta posizione attraverso l'indovinello della rappresentazione di Edelman, chiedendosi cosa ci sia ad accomunare il processo di rappresentazione visuale di due umani, una scimmia ed un robot che fissano un pezzo di formaggio: il formaggio, naturalmente[5].

Nel settimo e nell'ottavo capitolo di *Applied Ontology* vengono descritti gli approcci possibili alla classificazione delle entità e allo sviluppo di "ontologie modulari". Infatti, anziché rappresentare la realtà in un singolo modulo e attraverso un singolo punto di vista, si preferisce distinguere le "ontologie di referenza" (reference ontology) - ontologie di "livello neutrale", il cui è di vitale importanza l'espressività di categorie molto generali – dalle "ontologie di dominio" e dalle "ontologie d'applicazione", il cui obiettivo è l'applicazione di categorie ontologiche a singoli e specifici domini, o applicazioni. In tal senso, ogni modulo ontologico determina anche la "granularità" degli enti rappresentati: intuitivamente, un corpo umano può essere studiato sia dal punto di vista anatomico, sia dal punto di vista cellulare e ge-

[5](Grenon, 2008).

netico. Nel primo caso (cfr. Foundational Model of Anatomy, FMA), tra le entità descritte potremmo trovare qualcosa come *apparato cardiaco, infarto, diabete, braccio, cervello, tumore del seno* e via dicendo; nel secondo caso (cfr. Gene Ontology, GO), invece, avremmo entità del tipo HN1FA, PPARG, INS, FOXP3, ossia geni. Le ontologie applicate, allora, classificano formalmente uno specifico livello di realtà e poi tali livelli possono essere combinati tra loro attraverso il ricorso ad un'ontologia di referenza. BFO, per esempio, è l'ontologia di referenza dell'OBO Foundry, un progetto internazionale il cui obiettivo è lo sviluppo e la condivisione di ontologie per la biomedicina e in cui almeno in linea di principio esiste la possibilità di stabilire delle corrispondenze tra ontologie di diversa granularità sullo stesso dominio.

Probabilmente, il merito più importante di *Applied Ontology* è presentare l'ontologia applicata come strettamente connessa alla metafisica e all'ontologia filosofica, ossia all'idea che per una descrizione formale delle entità presenti in un determinato dominio, a carattere biomedico o meno, sia in ogni caso necessario rapportarsi alla realtà e dunque stabilire delle connessioni tra la rappresentazione e ciò che viene rappresentato. Al contrario, soprattutto nella comunità informatica ed ingegneristica, molti studiosi si fermano a considerare gli sviluppi dell'ontologia applicata come strettamente legati alle potenzialità di rappresentazione dei linguaggi usati per tali obiettivi, primo fra tutti OWL, Ontology Web Language. Non ci si rende conto, invece, che le potenzialità di sviluppo dell'ontologia applicata sono strettamente connesse allo sviluppo di categorie filosofiche, ossia sono legate allo sviluppo di una vera e propria teoria della realtà. Rappresentare un dominio, significa porsi l'interrogativo di cosa sia quel dominio; significa assumere una posizione metafisica sugli oggetti; stabilire differenze tra ciò che è ontologicamente dipendente e indipendente, tra ciò che è particolare e ciò che è universale, tra ciò che necessità una descrizione in termini temporali e non. Difatti, alcuni dei problemi discussi nel presente testo hanno una storia vecchia di duemila e più anni; questioni del tipo quale è il significato dell'essere; cosa significa essere "un oggetto"; quale relazione sussiste tra le parti e il tutto; in che senso è possibile che il livello più semplice giustifichi quello più complesso e così via. In pratica, solo attraverso una matura teoria ontologica, la rappresentazione in OWL può essere davvero un'ontologia e non un semplice gioco concettuale.

Riferimenti bibliografici

Gomez-Pérez, A., M. Fernandez-Lopez, and O. Corcho (2004). *Ontological Engineering*. Springer. 139

Grenon, P. (2008). A primer on knowledge management and ontological engineering. In K. Munn and B. Smith (Eds.), *Applied Ontology. An Introduction*, pp. 57–82. Ontos Verlag. 140

Johansson, I. (2008a). Bioinformatics and biological reality. In K. Munn and B. Smith (Eds.), *Applied Ontology. An Introduction*, pp. 285–310. Ontos Verlag. 139

Johansson, I. (2008b). Four kinds of "is a" relation. In K. Munn and B. Smith (Eds.), *Applied Ontology. An Introduction*, pp. 235–254. Ontos Verlag. 139

Munn, K. and B. Smith (Eds.) (2008). *Applied Ontology. An Introduction*. Ontos Verlag, Francoforte. 139

Staab, S. and R. Studer (2009). *Handbook on Ontologies*. Springer. 139

Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 © http://www.rifanalitica.it
Sponsored by *Società Italiana di Filosofia Analitica*

"Another World Is Possible" Conference on David Lewis

[Urbino, 16th-18th June 2011]

Mattia Cozzi, Mattia Sorgon

Autori. Mattia Cozzi. cozzimattia@gmail.com. Mattia Sorgon. mattia.sorgon@gmail.com.

Indice

1 Overview

"Another world is possible", the conference in memory and in honor of David Lewis (1941-2001), (https://sites.google.com/site/conferencelewis/home) took place at the University "Carlo Bo" of Urbino, on the 16th, 17th and 18th of June. In these three days several philosophers have presented and discussed some of the most interesting Lewisian themes, showing their current research development.

The conference has been structured into five 90 minutes plenary talks, each one followed by a session focused on a particular topic. Andrea Bottani from University of Bergamo, Sònia Roca-Royes from University of Stirling, John Collins from Columbia University, John Divers from University of Leeds and Vincenzo Fano from University of Urbino presented their papers in the first ones, while the latter ones were "Semantics and Convention", "Mereology, Properties and Persistence", "Counterfactuals", "Modality and Possible Worlds" and "Causality and Time"[1]. Each post-plenary session consisted in three 45 minutes talks about the selected topic. In this reportage we will keep this structure reporting all five plenary talks and the abstracts of every session.

We would congratulate for the efficient organization with the Organizing Committee, composed by Aphex's editorial team (http://www.aphex.it/), thanking them warmly for their willingness, without which this reportage could not have be written.

[1]The second talk scheduled in this last session, of which we report the abstract, did not take place due to the absence of the speaker.

2 Plenary talks

2.1 *What Temporary Intrinsics tell us about Persistence*

Andrea Bottani (University of Bergamo)

Abstract. The so-called argument from temporary intrinsics is among the most controversial aspects of Lewis' theory of persistence (Lewis 1988, 1988a, 2002). Indeed, the argument has very often been found inconclusive, on the ground that it does not succeed in establishing that temporary intrinsics can only be accommodated by embracing perdurantism (see, among many others, Johnston 1987, Haslanger 1989, Merricks 1994, Lowe 1987, van Inwagen 1990, Zimmermann 2005, Wasserman 2005, Odden 2010). According to Zimmermann, Merricks and other presentists, temporary intrinsics can perfectly well be accommodated in a presentist account of persistence. According to Lowe, endurantists can account for the temporary intrinsic properties of a whole by treating them as temporary extrinsic relations between its parts. According to Johnston and to others, temporary intrinsics can be accounted for by relativizing to time the relation of instantiation. And, according to Haslanger, Lewis' argument can be blocked simply by adjusting the notion of an intrinsic property. I shall argue that Lewis' argument from temporary intrinsics is inconclusive for a stronger reason, since endurantists can have a B-theory of time, abstain from indexing the copula, share the Lewisian notion of an intrinsic property and still give a convincing account of temporary intrinsics. They have only to recognize that intrinsic really monadic properties are sometimes neither determinately true nor determinately false of persistent objects. Then I shall argue that, if persistent objects determinately have at least some really intrinsic monadic properties, then neither perdurantism nor presentism can convincingly account for them.

Review. Starting from the problems of persistence and change across time, Bottani analyses Lewis' position on the theme focusing on his major arguments.

Given that change requires both persistence and discernibility, while persistence requires identity, an antinomy raises between the indiscernibility provided by identity and the discernibility needed by change. Once distinguished perdurance and endurance,

> Something *perdures* iff it persists by having different parts, or stages, at different times, though no one part of it is wholly present at more than one time; whereas it *endures* iff it persists by being wholly present at more than one time. (Lewis 1986)

Lewis proposes three different solutions: there are no intrinsics properties but at least disguised relations; something has intrinsics properties only at the present moment, not in others; different intrinsics properties belong to different things, they are properties of temporal parts whose objects are made of. He concludes that only adopting endurantism the problem could be solved, while perdurantism is doomed to fail. According to him, Bottani claims that perdurantism cannot give a convincing solution to the problem of temporary intrinsics.

In this order he attacks Lewis' notion of simpliciter property, which supposes an absolutely monadic or purely timeless property, in favor of a time-relative one; meanwhile he concedes that temporary intrinsics could be treated as absolutely monadic, approaching them through a different account. Bottani focuses therefore on two perplexities about the idea that persistent entities can have timeless properties.

The first one concerns the semantical tenselessly of:

(1) The set of dogs contains Bobby.

(2) The set of beings barking at midnight of July 22^{th}, 2002 contains Bobby.

in which no tense is implicitly involved in the definite descriptions "the set of dogs" and "the set of beings barking at midnight of July 22^{th}, 2002". In fact, if that were the set of dogs, then it would contain all things that were, are or will be dogs, while the set of not-dogs would contain all that did not be, is not or will not be more a dog and Bobby, after death, would belong to both sets. Nonetheless (1) and (2) could not be true if entities existing in time have no tenselessly property: Bobby has in fact the tenselessly property of "being a dog" that establish the two-place set-theoretical relation between it and the set of dogs.

The latter perplexity concerns the frame-relativeness of such properties. According to perdurantism, entities are four-dimensional worms provided of temporal parts, while our intuitions say that if something has a certain tenselessly property it will instantiate it through all its lifespan. Hence, this argument seems to be valid and sound:

(4) The sheet is timelessly not-flat.
(5) The sheet existed (will exist) at time *t*.
(6) The sheet is not flat-at-*t*.

but in the perdurantist view does not. Indeed if (5) refers to a temporal part it is true but (6) does not follow from the premises, while if (5) refers to the four-dimensional worm the conclusion follows but (5) is false because a worm cannot exist at just one moment of its long lifespan. Therefore, for perdurantism, the timeless properties of a sheet can have no bearing on its temporally qualified properties because "x is timelessly P and exist at t" does not imply "x is P-at-t".

Following these considerations, Bottani introduces the "temporary distributivity of predication":

(DPT) $\quad P(x)$ at $(i^1 + i^2)$ iff $[(P(x)$ at $i^1)$ and $(P(x)$ at $i^2)]$

which claims that if an object has a property in every instant in an interval, then it has the property for the all interval. Perdurantism implies a radical negation of this principle, therefore this account brings Bottani to claim that ordinary objects do not exist, in contrast to its initial purpose, which was to explain how such objects persist. Neither a reductionist stance on persistence, as the stage view, could improve this account: it falls under the same difficulties providing only a temporal counterpart for the thing in (5) and lacking to characterize the thing itself, that is the stage that exists now. Hence it seems that the perdurantism framework differs in determining the timelessly properties of worms respect that own of ordinary objects, failing in solving this problem.

Finally, basing on Fine's *sempiternal* and *eternal* distinction (Fine 2005), Bottani concludes his talk presenting a tripartition on having a timeless property. A thing can be essential x, not-essential x or radically indeterminate x (indeterminate whether it is x and whether it is not x). Despite just mentioned, this account appears to be interesting, showing its compatibility with all classical logic's principles, avoiding ontological vagueness and providing a sort of "flexibility" through the same property and different objects.

2.2 *Conflation, primitive modality, and the Humean intuition* Sònia Roca Royes (University of Stirling)

Abstract. The paper is mostly an exploratory exercise. It is also a comparative exercise. I explore, comparatively, some of the pros and cons of Linguistic Abstractism and Lewisian Concretism on the nature of possible worlds. I grant – for the purposes of the paper – Lewis' two main criticisms against Linguistic Abstractism – namely, that it must resort to primitive modality and that it does not have sufficient descriptive power. It is on the basis of those criticisms that Lewis constructs his abductive argument for Concretism. By exploring how representation *de re* works in a Lewisian Concretist account, I find support for the claim that Lewis' account suffers from some – a limited amount of – those same problems. This, if correct, weakens the abductive argument for Lewisian Concretism – although only accordingly limitedly. By continuing to exploring the commitments of the Lewisian Concretist account, I find support also for the claim that the account is committed to necessary connections among different existents of exactly the kind that Lewis says there are not. This, if correct, generates an internal tension in Lewis' Concretism; one that would substantially weaken Lewis' abductive argument, perhaps to the point of Abstractism coming out, even when granting the problems above, as a provisional winner. The Concretist has nonetheless room for manoeuvre, and there is a move that suggests itself. Yet, that move will cost something, and further exploratory work should be done to evaluate its exact price. I leave this further task for another occasion, but I anticipate where, I think, these further efforts should concentrate.

Review. Lewis' Concretism uses Plenitude to guarantee enough descriptive power to Modal Realism. Lewis postulates then a possible world for every possible way a world can be. It is possible to ask: can the plurality of worlds be made in a different way? Lewis answers "No", but Sònia Roca Royes claims that both a negative and a positive answer are available. However, different answers involve different costs.

Lewis' negative answer prevents Modal Realism to lose descriptive power (there would be uninstantiated possibilities), be forces him to postulate necessary connections between causally and spatiotemporally isolated possible worlds. A positive answer leads to the claims that the plurality of worlds satisfies the Principle of Plenitude (PP) in a contingent way, avoiding the lack of descriptive power and the postulation of necessary connections between possible worlds. The cost of this second approach is a major difficulty in resisting to the Ersatzer's theories.

After this introduction, Roca Royes proposes a simplified case study to go deeper into the problem of necessary connections between possible worlds: in the actual world @ subject a throws a glass b (Tab) and the glass breaks (Bb). This situation is synthetically written as Tab & Bb. Because of PP, must be there a possible world w1 in which a counterpart of a, the subject c, throws a counterpart of b, the glass d, and d doesn't break: Tcd & $\neg Bd$.

@ is connected to itself and to w_1 by a representation relation, and the same happens to w_1: Tab & Bb represents the possibility that in @ a could have thrown b and b could have broke (which is what actually happened in @) and the possibility that Tcd & Bd. In the same way, Tcd & $\neg Bb$ represents the possibilities Tab & $\neg Bb$ and Tcd & $\neg Bb$.

The following terminology will be used: @-possibility/w_1 (abbreviated in @/w_1) is the possible way @ could be, represented by the world w_1.

Roca Royes introduces then a distinction between "*de re* ways" a world could be (which are ways involving particular individuals and are therefore ways in which only one world could be) and "qualitative ways" many worlds could be, involving undetermined individuals. In the example proposed, @ could be *de re* Tab & Bb or Tab & $\neg Bb$, but not Tcd & Bd or Tcd & $\neg Bd$. Qualitative ways in which @ and w_1 could be are Txy & Bx or Txy & $\neg Bx$.

Recalling the quotation in (Lewis 1986) that «There is but one totality of worlds; it is not a world, it could not have been different» (NCP), and using her distinction between *de re* and qualitative ways, Roca Royes asks now: is the totality of worlds the way it is in the qualitative sense or in the *de re* sense? Her answer is that the totality of worlds is necessarily the way it is in the qualitative sense, but it is contingently the way it is in the *de re* sense.

The actual world represents the following *de re* world-possibilities: @/@, w_1/@, w_2/@, w_3/@ (meaning that worlds @, w_1, w_2, w_3 could as @ actually is). Could the conjunction

$$@/@ \ \& \ w_1/@ \ \& \ w_2/@ \ \& \ w_3/@ \ \ldots$$

be true? Lewis, because of NCP, answers "No". *De re*, the totality of worlds is

$$@/@ \ \& \ w_1/w_1 \ \& \ w_2/w_2 \ \& \ w_3/w_3 \ \ldots$$

but it is not implied by NCP that the totality of worlds is *de re* the way it is. In fact, NCP does not rule out that the totality could be

$$w_3/@ \ \& \ w_2/w_1 \ \& \ w_1/w_2 \ \& \ @/w_3$$

or

$$w_1/@ \ \& \ @/w_1 \ \& \ w_2/w_2 \ \& \ w_3/w_3$$

and so on. Therefore, there are different *de re* ways the totality of worlds could be, as long as PP is satisfied from a qualitative point of view. Roca Royes calls "totality-possibility" the conjunctions of world-possibilities that don't violate plenitude. For example, the conjunction

$$w_3/@ \ \& \ w_2/w_1 \ \& \ w_1/w_2 \ \& \ @/w_3$$

is a *de re* possibility for the totality of worlds.

The thesis is that the totality is contingently *de re* the way it is, and it does not conflict with NCP, if NCP is interpreted in the qualitative sense. This thesis, claims Roca Royes, is both unproblematic and desirable.

A possible objection is that this notion totality would require the plurality of the totality of worlds. This is not a real problem, because *de re* possibilities for the totality of worlds are qualitatively identical. Moreover, Lewisian Concretism can deal with Roca Royes proposal very easily. Assuming that the world which contains Humphrey inherits the possibility that Humphrey has six fingers, we can extend this intuition to the totality of worlds too. We can then render "It is possible for Humphrey to have six fingers" as "It is possible for the totality of worlds that Humphrey has six fingers".

Back to the case of the thrown glass and limiting to a plurality of worlds with only two worlds, the *de re* possibilities are:

$$(Tab \ \& \ Bb) \ \& \ (Tcd \ \& \ \neg Bd) \quad \text{and} \quad (Tab \ \& \ \neg Bb) \ \& \ (Tcd \ \& \ Bd)$$

De re impossibilities are instead:

$$(Tab \ \& \ Bb) \ \& \ (Tcd \ \& \ Bd) \quad \text{and} \quad (Tab \ \& \ \neg Bb) \ \& \ (Tcd \ \& \ \neg Bd)$$

In this case study, $\neg Bb$ and $\neg Bd$ metaphysically exclude each other, as Bb and Bd do, while $\neg Bb$ and Bd necessitate each other, as Bb and $\neg Bd$ do. Generalizing the example, the necessary connections among worlds (or entities in worlds) would be stated with a necessity operator governing an infinite disjunction of infinite conjunction of world-possibilities, which is the infinite disjunction of all totality-possibilities. In general, worlds must be in equilibrium.

The last question Roca Royes deals with is the following: is it against Lewis' analysis of modality to attribute modal properties to the totality of worlds? Her answer is "No", and she proposes an analysis of these modal properties:

$$\Diamond_t(p) \text{ iff } (p) \text{ is the case according to some totality-possibility}$$

$$\Box_t(p) \text{ iff } (p) \text{ is the case according to all totality-possibilities}$$

Roca Royes' presentation would have proceeded further in this analysis, but her available time was over.

References

- Lewis, D. (1986), *On the Plurality of Worlds*, Oxford: Blackwell.

2.3 *The Parsing of the Possible*
John Collins (Columbia University)

Abstract. If the verb 'to parse' is taken not in its narrower grammatical sense, but in the more general sense of 'resolving a thing into its component parts', then the problem of the 'parsing of the possible' is that of finding a principled way of carving logical space more finely than one can using the tool of the counterfactual conditional. This paper reviews the reasons for rejecting a conditional analysis of dispositions (finks, masks, and mimics) and argues that David Lewis's denial of the possibility of masked dispositions robs us of an important resource: dispositional concepts that are concepts of component dispositions. A satisfactory metaphysical account of component dispositions could be used to overturn the conventional direction of analysis and provide a dispositional account of counterfactual conditionals and causation.

Review. Collins' talk aims to argue against the supporters of simple counterfactual. He starts proposing the squashball example: the ball is elastic (it has a disposition to being elastic), but it can be broken if immersed in liquid nitrogen. This demonstrates that dispositions, like other properties, can be gain and lost. A particular kind of disposition are finkish dispositions, and here is how Lewis defines them:

> Anything can cause anything; so stimulus s itself might chance to be the very thing that would cause the disposition to give response r to stimulus s to go away. If it went away quickly enough, it would not be manifested. In this way it could be false that if x were to undergo s, x would give response r. And yet, so long as s does not come along, x retains its disposition. Such a disposition, which would straight away vanish if put to the test, is called finkish. A finkishly fragile thing is fragile, sure enough, so long as it is not struck. But if it were struck, it would straight away cease to be fragile, and it would not break. (Lewis 1997)

Finkish dispositions are intrinsic properties and any of them is a counter-example to the simple conditional analisys, this analysis needs so to be reformed. Lewis performs this task basing his theory on cause and disposition. Collins claims that this analysis has been accepted by many, while the counterfactual analysis of causation has been widely attacked, but they are in fact parallel.

Even if it's possible to build cases that involve both causation and disposition, Lewis gives quite different answers to the problem of causation and disposition. Collins' suggestion is instead that parallel problems require parallel analyses.

The next step is the analysis of the so-called "masking phenomenon", in which a disposition is retained but fails to manifest, and of the "mimicking phenomenon", in which a disposition is lost but another cause mimics it. In the second case, we are in presence of finkish dispositions, while in the first case we are not. The situation described is represented in the following table.

off-finks	on-finks
masking	mimicking

Lewis deals with the first and the second line in two different ways, respectively by revising the counterfactual analysis of dispositions and by proposing the strategy of complicating the stimulus. In particular, the second strategy appears very complicated to Collins, and not very promising.

He proposes instead to treat these similar problem in a similar way, by saying that in both cases the disposition fails to manifest. Within this view, we can say that the vase is fragile but fragility fails to manifest because it is masked (by packing material, for example). A disposition can still fail to manifest, even if the stimuli are satisfied: it is masked. In fact, Collins prefers to reduce both cases to masking theory, analyzing counterfactuals in terms of dispositions.

He distinguishes between "total dispositions", for which counterfactual analysis holds, and "component dispositions", for which we don't generally have rules of composition, as addition (we have rules of composition in cases like physical forces with precise rules for vector composition.

Therefore, we can recognize a common pattern for the dispositional analysis of causation:

- belief and desire as dispositions to action, component parts to a rational agent to act;
- intrinsic desires, dispositional components of an agent;
- Cartwright's explanation in terms of component disposition.

Collins concludes his talk quoting the opening lines from *The Passing of the Possible* in (Goodman 1955) and asking for a new method for analytical metaphysics.

References

- Goodman, N. (1955), *Facts, fiction, and forecast*, Cambridge (MA): Harvard University Press 1983.
- Lewis, D. (1997), "Finkish Dispositions", in *The Philosophical Quarterly*, Vol. 47, No. 187, pp. 143-158.

2.4 *Lewis – he himself! – on the analysis of modality*
John Divers (University of Leeds)

Abstract. Much of the debate about what Lewis has (not) achieved with respect to his proposed analysis of modality is vitiated by failure to take proper account of Lewis's own conception of what his project is. By identifying, and reflecting upon, Lewis's own conception of his project we will appreciate better what he did (not) achieve by his own lights. But there is more to learn. For even if we do not accept Lewis's own conception of what analysis is, or ought to be, we (at least) derive from Lewis a standard of what an appropriately detailed and careful conception of analysis should amount to – a conception of the questions that an analysis must address in order to amount to a properly evaluable proposal. In light of my conclusions, I deal critically with various treatments of the topic of Lewis on the analysis of modality.

Review. Divers' talk focuses on the proper Lewisian definition of analysis in order to review some of the criticisms to Lewis' works. In order to satisfy this aim he starts providing, according to Lewis' own, a faithful definition of analysis:

> An *analysis* is an analytic theory that relates an input/data sentence to an output/theory sentence.

Analysis can be represented with a triple <O, D_i, M> in which O stands for "Opinion-sentence", D_i for "Network of Definitions and Inferences" and M for "Metaphysical-sentence". The first sentence, the input/data one, stands for a body of opinion, usually the analyst's own. Hence, it has a doxastic status, expressing all that is taken to be true and playing the role of the "analysandum". The analysis then develops dealing with a singular element of the O-sentence: its aim is metaphysical, therefore the output/theory sentence will be conceived as establishing the metaphysical base of what is to be taken as a comprehensive account of what there is.

Once defined a satisfying account, Divers proceeds describing in details analysis' features and criteria, as intended by Lewis.

First of all, an analysis has an *operational directive*: it aims to achieve systematization, constructing a Metaphysical-sentence that captures all the aspects of the O-sentence. It performs this task by means of the method of *definition*: setting up a network of analytic hypotheses and inferences (D_i), the theory links the O-sentence to the M-sentence.

Secondly, an analysis is successful if it fulfills the aim of *conservativeness* and *economy*. By conservativeness Divers means the capability to maximize the capture of opinion without corrupting it, while by economy he intends the best explanation with the lowest metaphysical costs possible.

Finally, an analysis has to follow several *rules of thumb for the application*, individually and in combination, of each criterion of success. On one hand, in order to evaluate economy, it should be considered that, *ceteris paribus*, is more advantageous favoring ontological qualitative economy than quantitative economy; concerning conservativeness, prephilosophical opinion outranks philosophical one. On the other hand, in combination, conservativeness has to be favored respect economy.

At this stage Divers recalls two long quotations from (Lewis 1973) and (Lewis 1986), which endorse his claims and remark how the American philosopher based his research to this account.

In the final part of his talk, Divers concludes highlighting some inconsistencies in the criticisms to Lewis. Referring mostly to the clearest misunderstandings of the literature, he lists five systematic misconceptions about Lewis' works:

- confusion between Lewis's project with one's own;
- failure to fully articulate an alternative conception;
- failure to distinguish the analytic theory from its subject-matter;
- failure to distinguish the components of the analytic theory;
- failure to appreciate the relevance of ontology to analysis.

This talk was very accurate, well-argumented and original and it showed an aspect of Lewis' thought usually overlooked/neglected.

2.5 *Recent developments on Lewis' definition of time travel* Vincenzo Fano (University of Urbino)

Abstract. In 1976, Lewis gave a definition of time travel that was later widely used by philosophers: a time travel occurs when the separation in external time between departure and arrival does not equal the duration, in the traveler's proper time, of the journey. It has been successively argued that this definition does not capture neither a necessary condition for a time travel (a backward time travel can simply occur even if its duration equals the temporal separation between departure and arrival), nor, more significantly, a sufficient condition. Indeed, in Special Relativity, the meaning of the locution "separation in time..." is not at all clear insofar as the relativity of simultaneity in general implies different separations between events for observers in relative motion, and, in General Relativity, even if it is possible to earn an objective meaning for that "temporal separation", what results is that almost everyone who moves, in a sense, would qualify as a time traveler. It has been often adopted, therefore, another definition, simply stating that a time travel (into the past) is that journey (called Gödelian time travel) occurring in those closed timelike curves obtainable from some general relativistic solutions whose spacetimes have particularly curved topological structures. Lewis' definition, however, is not to be disregarded. Its importance resides in the fact that it does seem to capture an important intuitive sense of time travel insofar as it stresses the natural necessity to compare the traveler's time and the "time of the world". This fact is particularly clear in Wellsian time travel, in which time traveler may roughly be imagined suddenly disappear at a certain instant and then somehow reappear at another instant. Such a travel, usually considered to take place in Newtonian or Minkowskian spacetimes, occurs in a global ordered temporal background, so that it is formally possible that temporal comparison. On the contrary, a Gödelian time travel, for instance happening in a Gödel universe, has no external temporal frame of reference valid for the whole spacetime: there is only a proper time always directed towards the traveler local future. From this viewpoint, only a Wellsian travel can be seen as an effective travel through time, as a "movement" over time, whereas a Gödelian one is only – as it were – a travel "of" spacetime: its closed curve merely represents the spatiotemporal constraint for the traveler. Unfortunately, Wellsian travel is not considered deserving serious scientific attention both because the traveler's worldline has an anomalous structure not easily explainable from a physical viewpoint and because it leads to indigestible causal relations in which effects precede causes. In this talk I will argue that that "Lewisian intuitive sense" can be recovered also for some particular Gödelian time travels which, theoretically, happen in bounded regions of universes, like ours, in which Weyl's Principle holds. Such a principle, stating the regularity (non-vorticity) of the divergent worldlines of galaxies, allows to foliate spacetime in a sequence of time slices. Thus it makes sense a temporal evolution of the universe as a whole because a global temporal order with respect to the comparisons "later than" or "earlier than" exists. Consequently, it becomes possible, in principle, to compare local time orders of closed curves with objective temporal orderings of "the rest of the world". In this sense, this kind of local Gödelian time travel recovers, at least partially, that more proper status of travel through time initially available only for the unphysical Wellsian travel.

Review. Vincenzo Fano's talk focuses on the notion of time travel (TT), starting from the definition given by Lewis:

> If [someone] is a time traveler, the separation in time between departure and arrival does not equal the duration of his journey. (Lewis 1976)

Fano presents then some aspects of time traveling. Lewis' definition isn't scientifically accurate, because it does not consider special relativity and the problems arising when trying to define what simultaneity is. However, in Lewis' definition we find a distinction between personal time and external time. Therefore, we can state the following: if these two kinds of time do not coincide, then we have a TT.

It is now possible to identify two kinds of TT:

- Wellsian TT, derived from the novella "The Time Machine" by H.G. Wells, which is physically impossible, as it is set in the context of the Newtonian universe;
- Gödelian TT, which is physically possible (even if it is more a "travel of time" rather than a TT).

Gödelian TT is a consequence of Gödel's solution to some of Einstein's field equations[2] and is theoretically possible, but only backwards and in a general relativity frame. Gödel's solution in fact implies CTCs (Closed Time Courses or Closed Timelike Curves), worldlines in closed spacetime which curve so severely that they curve back to themselves, resulting in an older version of a certain object appearing at one of its own earlier spacetime points.

Due to relativistic theories, we can no longer maintain a unique notion of "time": time is rather an emergent property of what happens, depending on the adopted theory. We can identify four "kinds" of time, depending on the objects considered and the theory which considers them: Minkowskian time (as in a particle accelerator), Newtonian time (as in "normal" contexts, for middle-sized bodies), semi-Reinmannian time (as in the time of a star) and semi-Newtonian time (as in the time of the cosmos).

With this differentiation, we can distinguish the two times required by Lewis' definition in a naturalistic way: external time is the semi-Newtonian (cosmic) time, while personal time is the time of a certain part of the cosmos (particles, middle-sized bodies or stars). Still, Minkowskian time and Newtonian time do not make use of general relativity and, as said, TT is possible only in a general relativity frame: therefore, the personal time could be only semi-Reinmannian time.

Fano proposes at this point a new definition of TT in the past:

> A TT in the past occurs when a body moves in its time from a successive instant to a preceding one in cosmic time.

The question is then: how to embed a CTC in a semi-Newtonian space-time? The answer is that if the CTC concerns more than one point in cosmic time, then an actual TT is possible. An actual TT is therefore a CTC (in which, from the point of view of the object, holds a semi-Reinmannian metric) in a globally (from the point of view of the cosmos) semi-Newtonian space-time. After these considerations, Fano proposes a definition of a Consistent TT:

> A Consistent TT is a TT in which what happens in the cosmic time t_1 (the event E_1) is caused by what happens at cosmic time t_2 (the event E_2) on a local CTC, but E_1 does not make E_2 impossible.

A further question arises: is it possible for the to future actually change the past? Lewis in his 1976 paper, notes that the past can be changed if we assume more than a universe (if we

[2]The equations in which the stress-energy tensor contains two terms, the first representing the matter density of a homogeneous distribution of swirling dust particles, and the second associated with a nonzero cosmological constant.

assume a multiverse). Changing the past is then a metaphysical possibility, but a nomological impossibility. This conclusion conflicts with the grandfather paradox[3], which seems to make changing the past impossible. Lewis is said to be unable to give a satisfying solution to this paradox, so Fano leans on the rather disappointing proposal by J. Earman: natural laws must explain the possibility of TT, but also the impossibility of changing the past, but such a physics is not currently available, so the problem remains unsolved.

References

- Lewis, D. (1976), "The Paradoxes of Time Travel", in *American Philosophical Quarterly*, Vol. 13, No. 2, pp. 145-152.

[3]The grandfather paradox can be roughly summarized as the situation in which an individual, entering in a CTC and making a TT, kills his grandfather or prevents him from procreation, making his TT possible (nomologically) and impossible (she should never have been born).

3 Abstracts from “Semantics and Convention”

3.1 *Linguistic Conventions*
Mark Cain (Oxford Brookes University)

David Lewis (1969), (1975) argued that conventions lie at the heart of language and developed a highly influential account of the nature of linguistic conventions. Such a view of language clashes with the Chomskyan position that portrays language as an internal psychological state of a speaker. In this paper my aim is to investigate this conflict. Following some Chomskyan critics of Lewis (particularly Stephen Laurence (1996), (1998)) I will argue that if we understand conventions along the lines recommended by Lewis then it is implausible on empirical grounds that conventions lie at the heart of language. This is because following a Lewisian convention involves having theory of mind skills that young children and sufferers of cognitive deficits such as autism do not have. For, the difficulty that such subjects have in passing the false-belief test suggests that they are unable to form the kind of higher-order propositional attitudes that are central to following a convention on Lewis's account.

However, this result does not in itself undermine a conventionalist view of language for one might argue that the problem lies with Lewis's account of convention. In particular, that Lewis's account is far too over-intellectualized. Such a charge has been made by Ruth Garrett Millikan (1998) and Michael Devitt (2006) both of whom develop related accounts of convention in the context of attacking the Chomskyan view that conventions have little role to play in language. I will argue against Millikan and Devitt's view of the nature of convention by producing a number of counterexamples relating to food preferences and senses of humour. This suggests that it would be unwise to retreat very far from Lewis's account of convention.

My overall conclusion therefore has two elements. First, Lewis has provided an account of convention of lasting interest and significance that is to be preferred to more recent alternatives. Second, there are good reasons for doubting that conventions are as central to language as Lewis thought. This conclusion has greatest plausibility when applied to syntax. However, I will argue, there are reasons to think that it also applies in the semantic domain: that is, the pairing of sounds and meanings in a language are not a matter of convention.

References

- Devitt, M. (2006), *Ignorance of language*, Oxford: Oxford University Press
- Laurence, S. (1996), “A Chomskian alternative to convention-based semantics”, in *Mind*, Vol. 105, pp. 269-301.
- Laurence, S. (1998), “Convention-based semantics and the development of language”, in P. Carruthers & J. Boucher (Eds.), *Language and thought: Interdisciplinary themes*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 201-217.
- Lewis, D. (1969), *Convention: A philosophical study*, Cambridge (MA): Harvard University Press.
- Lewis, D. (1975), “Language and languages”, in K. Gunderson (Ed.), *Minnesota studies in the philosophy of science, Volume VII: Language, mind and knowledge*, Minneapolis: University of Minnesota Press, pp. 3-33.
- Millikan, R.G. (1998), “Language conventions made simple”, in *Journal of Philosophy*, Vol. 95, pp. 161-180.

3.2 *Lewis' Convention Revisited: The Epistemic Root of Conventions*

Luca Tummolini (Istituto di Scienze e Tecnologie della Cognizione, CNR)

According to many, there is a distinction between two conceptions of rules (Rawls 1955; Searle 1969): a rule is 'regulative' when it aims to regulate actions that exist independently of the rule itself, and a rule is 'constitutive' when it aims to regulate actions that depend on the rule itself for their existence (Searle 1995). While the most often cited example of the former kind is "driving on the right" (an action that can be executed whether or not there is in fact a rule that prescribes to drive on the right), the latter kind of rule enables action such as "promising" and the like.

Recently, it has been proposed that it is useful to introduce a parallel distinction between two kinds of conventions (Marmor 2009: 31-57). The first kind of convention is aimed to coordinate the behaviour of a population of agents and "driving on the right" is the prototypical example. The second kind is aimed to constitute social practices like chess whose actions (e.g. "checkmate") would not exist independently from the social practice.

Though the rationale behind the distinction is different, Lewis himself has amended his original definition (1969) and offered an analysis of convention that identifies two kinds of regularities: conventional regularities in action and conventional regularities in action and belief (Lewis 1975). Following the same reasoning, one can even suggest the existence of conventional regularities in beliefs alone.

Hence, how many kinds of convention are there? How do these different kinds map on the two conceptions of rule? And, more importantly, is there any useful distinction between a social convention and a social institution?

The aim of this paper is to argue for the existence of epistemic conventions (i.e. conventional regularities in beliefs alone) and to suggest that we only need one coherent notion of convention that is specific to belief-based and goal-driven (cognitive) agents like us. In particular, I aim to show that a convention in the epistemic sense is always presupposed even by the simplest behavioural regularities that we consider conventions.

In order to support this claim, I will argue that Lewis' classical analysis rests on the agents having a "shared acquaintance with a precedence" (Lewis 1969: 40), and that he has offered a reconstruction of the possible explicit reasoning that the agents might endorse in order to predict each other's actions (Cubitt & Sugden 2003).

However, I will argue that such explicit deliberation is not actually required for a convention to perpetuate itself, because it suffices that the agents are able to believe in a coordinated way that something is a precedent. I will then introduce the notion of conventional regularities in beliefs (epistemic conventions). Conventional regularities in beliefs rest, ultimately, on the fact that those that interact together have been nurtured within a population that have evolved the appropriate concepts of what counts as precedent. In this view, salience, i.e. the property of some entity of standing out "from the rest by its uniqueness in some conspicuous respect" (Lewis 1969: 35), is the same property that it is commonly named affordance within the cognitive science community: the property of some entities to indicate to the agents the relevant interactive possibilities in a specific context (Gibson 1979). Moreover, though it is correct that precedent is the source of a form of salience, this salience or affordance is the product of a cultural evolutionary process and cannot be justified at the individual level as Lewis has attempted to do.

Having accomplished this, I will argue that there is in fact no meaningful way to separate social conventions from social institutions, or, which is the same, conventions aimed at coordinating already existing behaviours from conventions aimed at constituting new kinds of behaviours. Though I will argue that the distinction between two kinds of conventions or two conceptions of rules should be dropped, I will contend that it is useful to retain, within the same coherent notion of convention (the regularity conception proposed by Lewis), a distinction in relation to the different possible targets of such regularities: from purely epistemic convention (regularity in beliefs), to the cognitively hybrid (regularity in action and belief), and the purely behavioural ones (regularity in action).

References

- Cubitt, R.P. & Sugden, R. (2003), "Common knowledge, salience and convention: a reconstruction of David Lewis' game theory", in *Economics and Philosophy*, Vol. 19, pp. 175-210.
- Gibson, J. (1979), *The Ecological Approach to Visual Perception*, Boston (MA): Houghton Mifflin.
- Lewis, D. (1969), *Convention: A Philosophical Study*, Cambridge (MA): Harvard University Press.
- Lewis, D. (1975), "Languages and Language", in K. Gunderstone (Ed.), *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, Vol. VII, University of Minnesota Press (reprinted in his *Philosophical Papers, Vol. I*, Oxford: Oxford University Press 1983, pp. 163-188).
- Marmor, A. (2009), *Social Conventions: From Language to Law*, Princeton: Princeton University Press.
- Rawls, J. (1955), "Two concepts of rules", in *The Philosophical Review*, Vol. 64, pp. 3-32.
- Searle, J.R. (1969), *Speech acts: An essay in the philosophy of language*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Searle, J.R. (1995), *The Construction of Social Reality*, New York: The Free Press.

3.3 *Metaphysics of Pain; Semantics of "Pain"*

Alik Pelman (Hebrew University of Jerusalem)

I propose a methodology for analysis that I find rather powerful in general. It is based on the separation of the metaphysical and the semantic assumptions that lie behind positions and arguments, by means of possible-worlds analysis. The efficacy of such methodology is demonstrated by applying it to the Kripke-Lewis debate over the identity theory of mind. Such application yields a clear exposition of the competing positions and of their mutual objections, as well as a convenient way of reassessing their merit. The overall picture that emerges reveals some surprising results. To the extent that the proposed methodology is helpful, it could lead to further similar applications.

Kripke and Lewis famously debated the identification of the mental with the physical, specifically in the form of the functionalist identity theory of mind. In line with their shared fondness of possible-worlds analysis, each of the arguments accuses its opponent's position of having some unacceptable modal consequence. Specifically, Kripke accuses functionalism of allowing pain not to be painful in some possible worlds, whereas Lewis accuses Kripke's position of allowing that a painful state is not pain in some possible worlds.

We analyze and reassess the debate by separating the metaphysical and semantic assumptions – first, of the positions themselves, and then of their mutual objections. The first stage makes apparent the differences between the two positions, by contrasting their underlying assumptions:

	Semantics	**Metaphysics**
Lewis' Position	**"pain" is descriptive.** "Pain" designates, with respect to every possible world, that which is painful in that world.	**Being painful is neither necessary nor sufficient.** There are possible worlds where the actual painful state is not painful, and there are possible worlds where being painful is instantiated by a state other than the one that actually instantiates it.
Kripke's Position	**"pain" is *de jure* rigid.** "Pain" is stipulated to designate, with respect to every possible world, that which it designates in the actual world.	**Being painful is necessary and sufficient.** There is no possible world where the actual painful state is not painful, and there are no possible world where being painful is instantiated by a state other than the one that actually instantiates it.

This stage also clearly reveals that despite differences, both positions equally entail the desired consequence, that "pain" designates all and only painful states.

The second stage – namely, separating the assumptions that lie behind the mutual objections – reveals that both parties successfully refute the same position (albeit on different grounds):

Attacked Position	**"pain" is *de jure* rigid.** "Pain" is stipulated to designate, with respect to every possible world, that which it designates in the actual world.	**Being painful is neither necessary nor sufficient.** There are possible worlds where the actual painful state is not painful, and there are possible worlds where being painful is instantiated by a state other than the one that actually instantiates it.

However, this position is different from both Lewis's and Kripke's. In other words, we have three positions here, each of which comprises a different combination of metaphysical and semantic assumptions.

Ultimately then, both arguments misfire: while each position accuses the other of having some unacceptable modal consequences, neither position in fact has the unacceptable consequences ascribed to it.

4 Abstracts from "Mereology, Properties and Persistence"

4.1 *Why Immanent Causation is Bad Mereological Glue*

Stephan Torre (University of Barcelona)

David Lewis famously endorses the doctrine of unrestricted composition according to which for any objects, the xs, there exists an object that contains all and only the xs as parts. Two main difficulties that may be raised with Lewis's doctrine of unrestricted composition are (a) that it runs contrary to common sense and (b) that it leads to scientifically revisionary conclusions. According to common sense, there is no object composed of all current Romanian kindergarteners, Stalin's mustache, and the southernmost Starbucks. But Lewis's doctrine of unrestricted composition entails that there is such an object. Furthermore, according to physics, there are no objects that travel faster than the speed of light. However, Hud Hudson (2001) has shown that assuming Lewis's doctrine of unrestricted composition, along with the doctrine of temporal parts (also endorsed by Lewis), and the standard theory of motion, there are many objects traveling many times faster than the speed of light. So it seems that unrestricted composition (plus the doctrine of temporal parts) commits us to a scientifically revisionary conclusion.

In my paper, I evaluate an attempt to avoid these negative consequences by appealing to immanent causation as a restriction on composition. What makes the table that my laptop is resting on the same object that was here yesterday? Presumably it is because today's table stages are causally related in the right kind of way to the table stages that were in this location yesterday. If Zeus annihilated the table at a time arbitrarily close to midnight and Hera coincidently created an exactly similar one in the same location at midnight, then today's table stages would not stand in the requisite causal relation. The type of causation that relates the various stages of one and the same object is immanent causation.

In (2010) and (2003), Yuri Balashov argues for immanent causation as a necessary condition for diachronic composition. His thesis can be stated roughly as follows:

> (IC) For any material objects, the xs, there exists a y such that the xs diachronically compose y only if the xs exist at different moments and they are immanently causally related.

At first glance, such a restriction on composition seems capable of avoiding the main difficulties cited above for Lewis's theory of unrestricted composition. First, it entails that there is no object composed of all current Romanian kindergarteners, Stalin's mustache and the southern-most Starbucks since the relevant object stages fail to stand in the right kind of causal relation. Secondly, such a restriction rules out objects that travel faster than the speed of light: since the causal signal cannot exceed the speed of light, Hudson's fast moving objects are excluded from the resultant ontology.

I argue that the appeal to immanent causation as a necessary condition on composition fails to achieve the desired results. In section one, I provide an argument for the conclusion that restricting composition by appeal to immanent causation excludes ordinary objects from one's ontology. In the second section, I provide an objection to Dean Zimmerman's (1997) account of immanent causation which is intended to apply to mereologically constant masses. In the final section I argue that special relativity is incompatible with using immanent causation as a means of restricting diachronic composition. In the last section, I conclude that we should endorse unrestricted diachronic composition and I suggest ways of dispelling the two main worries cited above.

References

- Balashov, Y. (2010), *Persistence and Spacetime*, Oxford: Oxford University Press.
- Balashov, Y. (2003), "Temporal Parts and Superliminal Motion", in *Philosophical Papers*, Vol. 32, No. 1, pp. 1-13.
- Hudson, H. (2002), "Moving Faster Than Light", in *Analysis*, Vol. 62, No. 3, pp. 203-205.
- Zimmerman, D. (1997), "Immanent Causation", in *Philosophical Perspectives*, Vol. 11, pp. 433-471.

4.2 *Natural Properties, Supervenience, and Composition*

Andrea Borghini (College of the Holy Cross), Giorgio Lando (Scuola Normale Superiore, Pisa)

David Lewis's metaphysics is committed to the claim that some properties are natural. The claim serves three chief purposes: (i) it provides a grounding for the definition of intrinsic properties, thereby securing (ii) Lewis's version of the Principle of Recombination (roughly: "Anything can coexist with anything") and (iii) the identification of the basis for so-called Humean Supervenience. The claim that some properties are natural is in itself neutral about the identification of their bearers. However, according to Lewis' characterization of Humean Supervenience as a pivotal thesis of his entire philosophical work (Introduction to Lewis, 1986, p.ix-x), natural properties are "local", that is they are instantiated by points or point-sized entities. We question the tenability of the latter thesis, in two steps.

First step. Motivations for the commitment to natural properties do not entail the minimality of their bearers. (i) It is not required that only minimal entities should instantiate intrinsic properties. (ii) Recent works about the most proper formulation of the Principle of Recombination in modal realism show that it involves (in a non-redundant way) also complex entities (e.g. Efird & Stoneham 2008). (iii) In Lewis, Humean Supervenience is committed to the "locality" of natural properties only in its strongest form, which is a contingent hypothesis concerning only worlds sufficiently similar to ours; its weak core («'How things are' is fully given by the fundamental, perfectly natural, properties and relations that those things instantiate» (Lewis 1994: 474)), which Lewis deems to be a priori and to concern any world, is compatible with the distribution of natural properties among different levels of constitutional complexity.

The second step is to confront the hypothesis that the bearers of natural properties are minimal entities with two of Lewis' tenets about mereology and composition.

(a) The admission of unlimited mereological complexity (the so-called gunk) excludes trivially that, in gunkish worlds or parts of worlds, there are natural properties instantiated by mereological atoms. However, if natural properties were not instantiated by anything, these worlds or parts of worlds would be excluded from the domain of intrinsic properties and of the principle of recombination. Two alternatives come to mind: an infinite descent of bearers of natural properties; a privileged level under which there are no natural properties (where this level should be determined by a non-mereological criterion).

(b) According to the weak version of Composition as Identity, the relation between a whole and its parts is analogous to identity under several respects, among which the so-called "ease of description” (Lewis 1991: 85). This could suggest that the properties of a compound supervene on the properties of the atoms and the relations between them as much as the properties of the atoms and the relations between them supervene on the properties of the compound (composition would be boring, as in (Schaffer 2003: 205)); if so, then it is not clear why the properties of the compound should be less natural than the properties of the components.

References

- Efird, D. & Stoneham, T. (2008), “What is the Principle of Recombination?”, in *Dialectica*, Vol. 72, No. 4, pp. 483-494.
- Lewis, D. (1986), *Philosophical Papers, Vol. II*, Oxford: Oxford University Press.
- Lewis, D. (1991), *Parts of Classes*, Oxford: Blackwell.
- Lewis, D. (1994), “Humean Supervenience Debugged”, in *Mind*, Vol. 103, No. 412, pp. 473-490.
- Schaffer, J. (2003), “Is there a Fundamental Level?,” in *Nous*, Vol. 37, No. 3, pp. 498-517.

4.3 *Natural properties in counterpart theory*

Ghislain Guigon (University of Geneva)

While David Lewis warned Aristotelian essentialists to judge his counterpart theory “a false friend, a Quinean scepticism in essentialist’s clothings”, Todd Buras, in his *Counterpart Theory, Natural Properties, and Essentialism*, recently argued that adding natural properties to Lewis’s counterpart theory yields a full blooded Aristotelian essentialism. Roughly, Buras’s argument runs as follows. He interprets Lewis’s hierarchy of degrees of naturalness as entailing that perfectly natural properties are the privileged players of the similarity role. From the latter he concludes that if one adds natural properties to counterpart theory, the ontology privileges one determinate counterpart relation to determine the truth value of *de re* modal propositions: a determinate counterpart relation that is wholly determined by the number of shared perfectly natural properties.

One of my aims is to show that if the latter reasoning is sound, commitment to a full blooded essentialism is the least of the troubles for counterpart theorists who uphold Lewis’s doctrine of natural properties. Lewis advised us that his counterpart theory has the following virtues: counterpart theory can adequately explain the variability of our *de re* modal intuitions; counterpart theory allows us to solve problems of material constitution without being committed either to the existence of distinct coincident objects or to the view that identity may hold only contingently between an object and itself. Yet I shall argue that, if Buras’s argument is sound, Lewis’s counterpart theory loses these virtues if combined to his doctrine of natural properties.

However, I shall undermine Buras’s reasoning. I shall argue that the doctrine of natural properties displayed in Buras’s argument is not the doctrine Lewis has defended. In particular, and in common with many commentators, Buras misrepresents the ordering of natural properties. Most commentators interpret the naturalness ordering as a function of the complexity of the definition of a property in terms of perfectly natural properties. We might call this function the vertical axis of the naturalness ordering. However, as the theory is introduced in Lewis’s *New Work for a Theory of Universals*, properties whose definitions in terms of perfectly natural properties are equally complex can differ in naturalness depending on objective differences in resemblance of the perfectly natural properties in terms of which they are defined. We might call this function of objective differences in resemblance of natural properties the horizontal axis of the naturalness ordering. Now in Lewis's genuine modal theorist framework, predications of resemblance to properties are not to be taken as primitive but are to be analysed in as quantified statements of comparative resemblance involving particulars that may be parts of different worlds. Taking into account these aspects of Lewis's metaphysics of properties and of his genuine modal realism, I shall argue that perfectly natural properties are not privileged to play the similarity role in a way that suits Buras's reasoning. If I am right, then adding natural properties to Lewis's counterpart theory still yields a counterpart relation that is, in accordance with Lewis's word, not very settled at all.

5 Abstracts from “Counterfactuals”

5.1 *Lewisian Themes in Molecular Biology*

Marco Nathan (Columbia University)

The philosophy of David Lewis has been (and still is) extremely influential in metaphysics. Nonetheless Lewis’ work is surprisingly neglected in the philosophy of science. My goal in this essay is to show how Lewis’ work on redundant causation and his conditional analysis of dispositions – two landmarks in the topical literature – find important applications in scientific processes. I do so by discussing two examples from molecular biology, and showing that central concepts of Lewisian metaphysics are instantiated.

The first example involves the notion of preemption. Following Lewis (1986, 2000), in asymmetric cases of redundant causation where there is a cause that brings about an effect and another cause that would have brought about the effect had the other cause been absent, let us call the former the preempting cause, and the other the pre-empted alternative. Consider the following – familiar – example. An assassin is hired to shoot a victim and, unbeknown to the killer, a deadly poison is also administered, in the eventuality that the killer fails. The assassin, who successfully performs her job, is the preempting cause of the murder; the redundant poison is the preempted alternative. The notion of preemption has taken the center of the stage in metaphysical discussions of redundant causation; however it hardly had any impact on philosophical analyses of science. By discussing a case study from molecular biology – the operon model of gene Regulation – I argue that the concept of preemption is necessary to analyze the irreducible and omnipresent role of concentration of molecules in scientific explanations.

My second example focuses on dispositions. Dispositions figure prominently in both metaphysics and the philosophy of science, albeit in different ways. Metaphysicians attempt to provide an analysis of dispositions: a set of necessary and sufficient conditions that are required for an object to have a disposition. In contrast, philosophers of science are interested in explaining why an object displays a disposition. However, while such explanations focus on dispositions that are actually manifested by objects, metaphysicians have discussed at length cases such as finking and masking, where dispositions are prevented from being expressed (Lewis 1997). I argue that examples of finking and masking are not just the product of philosophical thought experiments, but are actually exhibited in actual biological processes. As a result, they should be accommodated by causal-mechanical explanations of dispositions. Moreover, examining how finkish dispositions are explained in science sheds light on metaphysical analyses of dispositions.

This essay points out two concrete applications of Lewisian concepts in biology; however, there is also a general moral to be drawn. Mainstream philosophy of science and traditional metaphysics are currently disconnected. The fact that notions such as preemptive causation, finkish dispositions, and masking are actually instantiated in science goes to show that the two disciplines are more closely connected than is often assumed. A chief aim of this essay is to show some of the benefits of putting them back together.

References

- Lewis, D. (1986), “Postscript e to ‘Causation’”, in *Philosophical Papers, Vol. II*, Oxford: Oxford University Press, pp. 193-212.

- Lewis, D. (1997), 'Finkish dispositions', in *The Philosophical Quarterly*, Vol. 47, No. 187, pp. 143-158.
- Lewis, D. (2000), 'Causation as influence', in *The Journal of Philosophy*, Vol. 97, pp. 182-197.
- Martin, C. (1994), 'Dispositions and conditionals', in *The Philosophical Quarterly*, Vol. 44, No. 174, pp. 1-8.

5.2 *Counterfactuals, Overdetermination and Mental Causation*

Simona Aimar (Oxford University)

The Exclusion Problem (EP) is well known. Consider the following claims:

(1) Mental events sometimes cause physical events.
(Mental Causation)

(2) Every physical event is caused by a physical event.
(Closure)

(3) Mental events are distinct from physical events.
(Distinction)

(4) The effects of mental events are not systematically overdetermined.
(Non-overdetermination)

(5) If an event has more than one sufficient cause, then it is overdetermined.
(Exclusion)

As Kim (cf. Kim 1998) has elegantly shown, all of (1)-(5) are plausible enough. Taken together, however, they appear to be in tension. Suppose my decision to drink causes my opening the fridge – (1). My opening the fridge is also due to the occurrence of a neural process in my head – (2). But this neural process is distinct from my wishing for a drink – (3). Now, if this one action of fridge opening is a standard action, it is not overdetermined – (4). But then, we have to choose what causes it: is it my decision to drink, or the corresponding neural process? 'Choose whichever, but just one!' – (5) says. Thus the fact that the mental and the physical are both sufficient causes of the same effect seems at odds with the idea that this effect is not overdetermined.

Kim's response to the EP is to drop (1), mental causation (cf. (Kim 1998), esp. ch.6). For him, the EP suggests that the physical trumps the mental: its bringing about the relevant effect leaves the mental with nothing to do. Karen Bennett rejects this response (Bennett: 2003). She contends that in order to solve the EP we must reject (5), Exclusion: it is not always the case that if an event has more than one sufficient cause, then it is overdetermined.

Bennett's argument against (5) relies on the following counterfactual test for overdetermination:

e is overdetermined by $c1$ and $c2$ only if:

(O1) $(c1 \mathbin{\&} \neg c2) > e$

(O2) $(c2 \mathbin{\&} \neg c1) > e$

are both (non-vacuously) true.

Two gunwomen shoot at the same victim. If the victim dies of two bullets, and her death is overdetermined, both (O1) and (O2) come out (non-vacuously) true: if either gunwoman had not been shooting, but the other had, the victim would still have died. So it seems that the non-vacuous truth of (O1) and (O2) is a necessary condition for overdetermination (476).

Given this test, Bennett argues that mental causation is a counterexample to (5). At its bare-bones, her argument is this:

(6) The effect *e* of mental causation has two sufficient causes – a physical cause *c1*, and a mental cause *c2* (473).

(7) The truth of (O1) and (O2) is a necessary condition for overdetermination.

(8) In the mental causation case, at least one of (O1) and (O2) comes out false.

So,

(9) Mental causation is a counterexample to (5).

If sound, this argument does two things. First, it shows that there is an alternative to Kim's solution to the EP. If one accepts mental causation, one can resolve the EP by other means. Second, the argument puts counterfactuals at use in establishing whether there is overdetermination. This is an important achievement. Bennett seems to have found a way to make the notion of overdetermination neater, and to show how this notion is closely connected with counterfactuals. However, Bennett's argument fails. This paper contests its two crucial premises, (7) and (8).

5.3 *Lewis' "causation as influence" and contemporary accounts of genetic causality: how counterfactual theories of causality account for some (but not all) notions of biological information*

Barbara Osimani (Catholic University of Milan, University of Macerata)

Lewis' notion of "causation as influence" (Lewis 2000), which has been developed in order to solve tricky problems of preemption – i.e. of causal redundancy – affecting the counterfactual analysis of causation, has been recently adopted by Kenneth Waters (2007) and by James Woodward (2010) in order to account for the notion of specificity and genetic causality in biology. The debate around these two notions has different roots and touches different philosophical questions at different levels.

After presenting Lewis' notion of influence and Woodward's and Water's adaptation of this concept to their analysis of genetic causality, the paper examines the different foci of these authors: whereas Lewis' notion of influence aims to present a sophisticated account of our intuitions underlying the notion of cause tout court, Woodward's intention is to use different categories, included influence, in order to provide the cues for a typology of causes; finally Waters' question regards instead whether the selection of a cause among several candidates as "the" cause can be reduced to a pragmatic issue, or whether it can be given an ontological basis.

As it is often the case, the analysis of causation turns out to be an extremely important laboratory, for the investigation of the epistemological stances assumed by philosophers, with the related implications, and the theoretical commitments they are more or less implicitly assuming. Indeed causality theories range from semantic questions concerning the *ti estì* of causality ("what is a cause" or "what do we mean when we use the term 'cause'?"), to the metaphysical status of causal relationships (objective reality vs. cognitive tools for grasping it), to epistemic questions concerning the validity of inductive leaps – the inference from correlation to causation – and the methodological efforts devoted to the distinction of causal from non-causal correlations. Three main streams of philosophical work have been identified in the literature devoted to causality: probabilistic theories, counterfactual theories and mechanistic theories. Each of them strives to solve specific dilemmas arising in the analysis of causality (non-deterministic causality, causal asymmetry, preemption, etc.).

Counterfactual notions of causality (such as Lewis's which draws on the notion of possible worlds, or Woodward's which draws on the notion of invariance under intervention) focus on counterfactual dependence of an event upon another, or, in manipulation accounts, in a correlation between a change of values in one variable with a change of value in the other (these can binary or multivalued, discrete of continuous). The paper illustrates how this formalization of the notion of cause allows to clarify much "informational talk" around the concept of causality, without nevertheless reducing all notions of information to causality.

6 Abstracts from “Modality and Possible Worlds”

6.1 *A Lewisian Approach to the Verification of Adaptive Systems*

Fabio Gadducci (University of Pisa), Alberto Lluch Lafuente (IMT Institute for Advanced Studies, Lucca), Andrea Vandin (IMT Institute for Advanced Studies, Lucca)

Many software artifacts like software architectures or distributed programs are characterized by a high level of dynamism involving changes in their structure or behavior as a response to external stimuli or as the result of programmed reconfigurations. When reasoning on such adaptive systems one is not only interested in proving properties on their global behavior like system correctness, but also on the evolution of the single components. For instance, when analyzing the well-known stable marriage problem one would like to know whether a solution ensures that “two females never claim to be married with the same male”.

To enable automatic reasoning, two main things are needed: models for the software artifacts and logic-based languages for describing their properties. One of the most successful and versatile model for such artifacts are graphs. Regarding the property specification languages, variants of quantified temporal logics have been proposed, which combine the modal operators of temporal logics with monadic second-order logic for graphs. Unfortunately, the semantical models for such logics are not clearly cut, due to the possibility to interleave modal operators and quantifiers in formulae like $\exists x. \diamond \psi$ where x is quantified in a world but ψ states properties about x in a reachable world or state where it does not necessarily exist or even have the same identity. The issue is denoted in the quantified temporal logic literature as trans-world identity [1, 3]. A typical solution follows the so-called “Kripke semantics” approach: roughly, a set of universal items is chosen, and its elements are used to form each state. This solution is the most widely adopted, and it underlines all the proposals we are aware of.

Kripke-like solutions do not fit well with the merging, deletion and creation of components, neither allows for an easy inclusion of evolution relations possibly forming cycles: if the value of an open formula is a set of states, how to account e.g. for an element that is first deleted and then added again? This problem is often solved by restricting the class of admissible evolution relations: this forces to reformulate the state transition relation modeling the system evolution, hampering the intuitive meaning of the logic.

In [2, 5] we presented an alternative approach, inspired to counterpart theory [4]. The key point of Lewis’s proposal is the notion of counterpart, which is a consequence of his refusal to interpret the relation of trans-world sameness as strict identity. In our approach we exploit counterpart relations, i.e. (partial) functions among states, explicitly relating elements of different states. Our solution avoids some limitations of the existing approaches, in particular in what regards the treatment of the possible merging and reuse of components. Moreover, the resulting semantics is a streamlined and intuitively appealing one, yet it is general enough to cover most of the alternatives we are aware of.

References

- Belardinelli, F. (2006), *Quantified Modal Logic and the Ontology of Physical Objects*, Ph.D. thesis, Scuola Normale Superiore of Pisa.

- Gadducci, F., Lluch Lafuente, A., Vandin, A. (2010), “Counterpart semantics for a second-order μ-calculus”, in H. Ehrig, A. Rensink, G. Rozenberg, A. Schüurr (Eds.), *ICGT.*

Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6372, pp. 282-297, Springer.

- Hazen, A. (1979), “Counterpart-theoretic semantics for modal logic”, in *The Journal of Philosophy*, Vol. 76, No. 6, pp. 319-338.
- Lewis, D. (1968), “Counterpart theory and quantified modal logic”, in *The Journal of Philosophy*, Vol. 65, No. 5, pp. 113-126.
- Lluch Lafuente, A., Vandin, A. (2011), “Towards a Maude tool for model checking temporal graph properties”, in F. Gadducci & L. Mariani (Eds.), *GT-VMT. Electronic Communications of EASST*, EASST.

6.2 *Actualizing possible worlds and mental content “de se”*

Maja Kittel (Jagiellonian University)

My aim is to use David Lewis’s notion of actualizing possible worlds in order to solve one of the problems with the concept of mental content. Firstly, I will have to throw more light on the very process of “actualizing” a possible world. In my view, it is closely connected with another of Lewis’s notions: knowledge “de se”. I will argue that knowledge “de se”, as characterized in Lewis’s “Attitudes de dicto and de se” is exactly the notion we need in order to explain the process of actualizing worlds, although it still requires some clarifying. Therefore, secondly, I will shortly describe how according to various empirical data (for example studies of neonate behaviour as well as analyses of the “self““ in schizophrenia), Lewis’s knowledge “de se” can be divided into at least two and at most six levels.

I will then explain how to use this enriched understanding of actualizing possible worlds in the analysis of mental content. In the many discussions about mental content, there is at least one issue that is easily lost among the sophisticated arguments: the tension between the “subjective” and processual dimension of content, the fact that it is somehow produced by a certain individual (a thinking agent) and the more objective (or intersubjective) dimension of content, often called representational or semantic, namely: the information conveyed by the content. (I am not referring here to the debate between externalism and internalism as regards the sources of content – to which one of the proposed solutions is, incidentally, the use of “centered” possible worlds in two-dimensional semantics).

If we think of content mainly in an objective fashion (for example, as of something analogous to the “that” clauses in sentences like “S believes that P is Q”), it becomes easily translatable into propositions, which usually leads us to identify mental content with meanings of linguistic sentences. There remain, however, phenomena that we find hard to ignore: the seemingly nonconceptual, processual and perhaps not even fully communicable dimensions of mental content that still has not been convincingly explained away. Philosophers typically concentrate upon the static, propositional elements of mental content or mental states and tend to overlook all the dynamic relations between the content and its bearer, the individual. This is why we have been getting closer to the roots of mental content in the external world but farther from its roots in our self-consciousness. In Lewis’s terms, we concentrate upon propositions (sets of possible worlds) we intend to make accessible to us but disregard the relation between us, concrete thinking individuals and the possible world we belong to – although without this relation, we could not make any other possible world accessible to us.

To sum up, I will show that the dynamic notion of actualizing possible worlds – the notion that brings together knowledge “de se”, self-consciousness and at least subsets of propositions – is exactly the concept we need in order to explain what mental content is.

6.3 *Between Modal Semantics and Decision Theory*
Fabrizio Cariani (Northwestern University)

What is the relation between a semantics for deontic modalities and substantive theories of what one ought to do? One would expect something like this: the semantics should not imply verdicts that are incompatible with the non- controversial core of the substantive theories.

Now let's imagine two theorists, we'll call them Qualy and Quanty.

Qualy is a possible-world semanticist in the style of Lewis (1981a); Kratzer (1981). For Qualy it's true that you ought to run iff at the highest ranked possible worlds you run. Qualy throws in some context dependence here and there to make this more plausible (and perhaps adopts a dyadic analysis as in Lewis 1974).

Quanty is a decision theorist. She doesn't need to work with an orthodox version of Bayesian Decision theory, but the story will be simpler if she does. When Quanty thinks about whether you ought to run, she sets up a quantitative model-distributes values over possible worlds (or a partition of states), figures out the relevant probabilities and calculates expectations. You should run, she thinks, iff running has the highest expected value among the options available to you.

Will Qualy and Quanty agree about what you ought to do? Here is a quick argument that they won't (mind you: I do not endorse the quick argument – it's just an instructive tool). Qualy thinks that what you ought to do depends only on what happens at the best possible worlds. Quanty, instead, thinks that what you ought to do can depend on what happens at any world whose probability is non-zero. Conclusion: there are bound to be cases in which formal semantics and decision theory conflict.

Response 1. There is an equivocation in the argument. When Qualy ranks possible worlds and when Quanty does the same (with more precision), they are not using the same ranking. Lewis (1978, 1981a) embraced this response and defended it from the charge of presupposing consequentialism.

However, the response stumbles on a follow-up metasemantic question: How exactly does Qualy rank worlds? I argue that there is no non-question begging way of ranking worlds that does the job that Qualy wants done.

Response 2. Things get better if Qualy stops ranking worlds and starts ranking alternative courses of action instead. Qualy can do this without too much violence to possible-world semantics, by modelling actions as sets of possible worlds.

If Qualy does this, he can just ask his friends who do substantive theorizing to supply him with a ranking of actions: he does not need to come up with a ranking of his own. If Qualy does this, we can make better sense of recent ideas about the 'information dependence' of deontic modalities (Kolodny and MacFarlane, 2010) and produce some new arguments for favoring 'premise' semantics over 'ordering semantics'.

In this talk, I give a comprehensive account of the benefits of *Response 2*.

References

- Kolodny, N. & MacFarlane, J. (2010), "Ifs and oughts", in *Journal of Philosophy*, Vol. 107, No. 3, pp. 115-143.
- Kratzer, A. (1981), "The Notional Category of Modality", in B. Partee & P. Portner (Eds.), *Formal Semantics: the Essential Readings*, Oxford: Blackwell.
- Lewis, D. (1974), "Semantic Analyses for Dyadic Deontic Logic", in *Papers in Ethics and Social Philosophy*, Cambridge: Cambridge University Press.

- Lewis, D. (1978), “Reply to McMichael”, in *Analysis*, Vol. 38, No. 2, pp. 85-86.
- Lewis, D. (1981a), *Counterfactuals*, Oxford: Blackwell.
- Lewis, D. (1981b), “Ordering Semantics and Premise Semantics for Counterfactuals”, in *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 10, pp. 217-234.

7 Abstracts from “Causality and Time”

7.1 *Time Travel, Foreknowledge and the Phenomenology of Freedom* Andrea Guardo (University of Milan)

I discuss a paradox about foreknowledge. I start with a brief outline of the puzzle. Afterwards, I sketch a solution. Finally, I argue that even if the solution I sketched works, the puzzle shows that foreknowledge is inconsistent with the “phenomenology of freedom”.

Let us suppose that, at t1, Gawd foreknows that, at t2, she will start whistling *All along the Watchtower*. Can she avoid it? It seems that she cannot. Foreknowledge is a kind of knowledge, and knowledge is factive; hence, that, at t1, Gawd foreknows that, at t2, she will start whistling *All along the Watchtower* implies that, at t2, she will start whistling that song. However, it also seems that nothing prevents Gawd from not whistling at t2: she has got both the ability and the opportunity. Therefore, it seems both that she can and that she cannot. This is the paradox.

The puzzle clearly mimics the Grandfather Paradox. Following Lewis (1976), it is often maintained that such paradoxes are spurious because “can” is “equivocal”. I show how to develop this insight in order to solve the paradox I sketched. Here is a brief outline (which can be developed both in terms of indexical contextualism and in terms of *non*indexical contextualism – *à la* MacFarlane (2009)):

(P1) X can do Y $=_{\text{def}}$ X’s doing Y is compossible with the relevant facts.

(P2) Which facts are relevant is determined by the context.

(P3) Gawd’s avoiding starting to whistle *All along the Watchtower* at t2 is compossible with the facts s1 we ordinarily count as relevant in saying what someone can do.

(P4) Gawd’s avoiding starting to whistle *All along the Watchtower* at t2 is not compossible with a more inclusive set of facts s2, which also counts among its members the fact that, at t2, Gawd will start whistling that song.

(C) The fact that Gawd can avoid starting to whistle *All along the Watchtower* at t2 is not necessarily inconsistent with the fact that she cannot; she can *relative to s1*, she cannot *relative to s2*.

Let us suppose that something like this can do the job. It is then clear that the fact that, at t1, Gawd foreknows what she will be doing at t2 has no bearing on what she will be able to do at t2. However, this fact has important consequences for the way Gawd sees herself. If Gawd had no foreknowledge of what she will be doing at t2, she would see herself as free to choose whether to start whistling or not. But if Gawd has such a foreknowledge, then things look quite different. Seeing herself as free to choose whether to start whistling or not seems clearly incompatible with knowing that she will.

This incompatibility seems to be generated by a general principle:

> It is impossible for X to believe at a single time (a) that it is certain that a state of affairs S will obtain, and (b) that he is at liberty to bring about S, or not-S as he chooses [. . .]. (Horwich 1975: 437)

In the final part of the paper, I defend the principle from Horwich’s criticisms.

References

- Dick, P. (1956), *The World Jones Made*, London: Vintage Books 1993.
- Goddu, G.C. (2007), “Banana Peels and Time Travel”, in *Dialectica*, Vol. 61, pp. 559-572.
- Horwich, Paul (1975), “On Some Alleged Paradoxes of Time Travel”, in *The Journal of Philosophy*, Vol. 72, pp. 432-444.
- Kiourti, I. (2008), “Killing Baby Suzy”, in *Philosophical Studies*, Vol. 139, pp. 343-352.
- Lewis, D. (1976), “The Paradoxes of Time Travel”, in *American Philosophical Quarterly*, Vol. 13, pp. 145-152.
- MacFarlane, J. (2009), “Nonindexical Contextualism”, in *Synthese*, Vol. 166, pp. 231-250.
- Sider, T. (2002), “Time Travel, Coincidences and Counterfactuals”, in *Philosophical Studies*, Vol. 110, pp. 115- 138.
- Smith, N.J.J. (1997), “Bananas Enough for Time Travel?”, in *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 48, pp. 363-389.
- Vihvelin, K. (1996), “What Time Travelers Cannot Do”, in *Philosophical Studies*, Vol. 81, pp. 315-330.
- Vranas, P.B M. (2009), “Can I Kill My Younger Self? – Time Travel and the Retrosuicide Paradox”, in *Pacific Philosophical Quarterly*, Vol. 90, pp. 520-534.
- Vranas, P.B.M. (2010), “What Time Travelers May Be Able to Do”, in *Philosophical Studies*, Vol. 150, pp. 115-121.

7.2 *The Humean Supervenience Thesis and the Metaphysics of Causation*

Frederik Nef (Institut Jean-Nicod, CNRS-ENS-EHESS)

«We are Humean about value, but not about causation» proclaimed the Credo of the Camberra Planers, as formulated by Daniel Nolan in 1996 – Me too. The Humean Supervenience Thesis is both central and elusive in David Lewis’ metaphysical system. I propose first to examine and make explicit the precise impact of this thesis concerning the relations or absences of relations between events or states of affairs and second to confront it with the Lewis’ late theory of causality in “Causation as influence”, and “Void and object”. I shall discuss the relevance of the supervenience of individuals upon points of space-time relatively to a theory of causation that tries to overcome the shortcomings of the pure counterfactual dependence between events. I shall defend an intrinsecalist view of causation and contemplate the possibility of a connective one, wondering if it would be compatible with the theoretical frame of general supervenience. In *Causation, a Realist Approach*, Michael Tooley criticized the Humean Supervenience Thesis as regards causation and Peter Menzies criticized too this principle, but then as regards chance, from the point of view of a probabilistic theory of causality. D. Lewis tried to remedy these criticisms in what we can call a second theory of causation, which attempts to be both broader and more flexible than the fist one, a counterfactual theory of causal regularities. But the singularist and non-reductionist conception defended by Armstrong constitutes a serious alternative even to this enlarged version of causation. However non-reductionist singularism faces at least two metaphysical difficulties. If it has to take into account the causal power of absence and void, how to individualize such absences and voids?

If we admit in a realist stance a connection *de re* between the cause and the effect, what is the difference between this connection – "an unbroken process connecting cause with effect" (Menzies 1989: 654) – and (counterfactual) dependence?

References

- Armstrong, D. (2004), "Going Trough the Open Door Again: Counterfactual versus Singularist Theories of Causation", in J. Collins et al. (Eds.), *Causation and Counterfactuals*, Cambridge (MA): MIT Press, pp. 445-458.
- Menzies, P. (1989), "Probabilistic Causation and Causal Processes: a Critique of Lewis", in *Philosophy of Science*, Vol. 56, pp. 642-663.
- Lewis, D. (1994), "Humean Supervenience Debugged", in *Mind*, Vol. 103, No. 412, pp. 473-490.
- Lewis, D. (2004), "Causation as Influence", in J. Collins et al. (Eds.), *Causation and Counterfactuals*, Cambridge (MA): MIT Press, pp. 75-106.
- Lewis, D. (2004), "Void and Object", in J. Collins et al. (Eds.), *Causation and Counterfactuals*, Cambridge (MA): MIT Press, pp. 277-290.
- Tooley, M. (1987), *Causation, a Realist Approach*, Oxford: Oxford University Press.

7.3 *A modal realist defense of presentism*

Michael De (University of St Andrews)

David Lewis held that "absolutely every way that a world could possibly be is a way that some world is" (Lewis 1986). One way the world could be is the way it was in 400 BC. It follows, according to modal realism, that there is such a possible world. In that world there is a perfect duplicate of the actual Socrates of 400 BC who shares with him the same relevant extrinsic properties. (We may go so far as to require the two be indiscernible in the sense of Lewis, though we needn't.)

Just as when I say that I could have had pancakes this morning for breakfast I'm really talking about one of my counterparts, when I say Socrates was wise I'm really talking about one of these other-worldly duplicates. The similarity between tense and modality and in particular times and worlds – a similarity observed by Prior, Fine, Zalta, Markosian and others – is here taken in its most serious form whereby similarity is identity and *times just are worlds*. One already sees this at the formal semantical level, though I don't think this observation carries much philosophical weight.

Why is any of this important? Because it has profound philosophical implications. The modal realist has at her disposal – and for *free* – a powerful argument for presentism, the thesis that all that exists is present. The argument is so powerful that it avoids all of the major objections to most defenses of presentism. In particular, it avoids the following objections.

1. *The argument from singular propositions*. A singular proposition expressed by a sentence of the form 'S is P' is a proposition that contains as a constituent, or directly refers to, S. There are singular propositions about the past (e.g. 'Socrates was wise'). Therefore presentism is false.

2. *The argument from relations*. If a relation holds between some things, then all of those things, the relata, must exist. Relations hold between non-present things and present things (e.g. between Socrates and myself since I do admire the man). Therefore presentism is false.

3. *The argument from causation*. Events are constructed out of existing things. For example, the event of John's loving Jane consists (perhaps among other things) of John and Jane. It is true that some present events are caused by past events. If at least one relatum of the causation relation exists, then so does the other. Present events exist, thus so do past ones. Therefore presentism is false.

4. *The argument from truthmaking*. Every truth has a truthmaker, i.e. an existing object on whose existence the truth depends. There are truths about the past such as that Socrates was wise. But the only plausible truthmaker for that proposition involves Socrates. Therefore presentism is false.

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 http://www.rifanalitica.it
Sponsored by *Società Italiana di Filosofia Analitica*

ECAP7
Seventh European Congress of Analytic Philosophy

[Milano, 1st-6th September 2011]

Mattia Cozzi, Michele Herbstritt, Giacomo Lini

Autori. Mattia Cozzi. cozzimattia@gmail.com. Michele Herbstritt. michele.herbstritt@studenti.unimi.it. Giacomo Lini. giacomo.lini8188@gmail.com.

Indice

1 Overview

The ECAP (European Congress of Analytic Philosophy) is an international congress organized by ESAP (European Society of Analytic Philosophy) every three years. Previous ECAPs (from 1 to 6) took place in various cities in Europe, such as Aix en Provence (France), Leeds (England), Maribor (Slovenia), Lund (Sweden), Lisboa (Portugal) and Kraków (Poland). ECAP7 took place in Milan, Italy, between 1st and 6th September 2011, and was organized by the Vita-Salute San Raffaele University, Milan, and the University of Milan. These two universities were the main sites for ECAP7: the Vita-Salute San Raffaele University for the first four days and the University of Milan for the last two days. A workshop session took also place at the Catholic University of the Sacred Heart, Milan, during the 4th day.

The congress was structured into five plenary talks and various parallel sessions and workshops. Plenary speakers were Kevin Mulligan, Dan Sperber, Agnieszka Jaworska, Tim Crane and Andrea Bonomi, whereas while parallel sessions were divided into the following topics: History of Philosophy, Epistemology and Philosophy of Science, Logic, Philosophy of Language, Philosophy of Mind and Action Theory, Metaphysics, Ethics, Aesthetics, Political Philosophy and Philosophy of Law, Philosophy of Religion. Plenary speakers had 90 minutes available for their talks, other speakers had 30 minutes (both including discussion). The official language was obviously English, so that every participant could follow any of the talks proposed.

Because of the huge number of talks, we decided to report here only the abstracts and a brief review from plenary talks. Any choice between the other talks (which were more than 300) would have been arbitrary and aleatory, since the sessions were parallel and we didn't have the chance to follow them all. Abstracts of parallel sessions are currently unfortunately unavailable for download. Statistics about submissions can be found at http://www.esap.info/ecap7/?page_id=412.

In the end, the organizing committee did a great job, everything worked very well and the affluence was good (there were also extra-european participants).

2 Plenary talks

2.1 *Because, Because, Because*

Kevin Mulligan (University of Geneva)

Abstract. «Because» is the most important connective about which elementary logic tells us next to nothing. It pops up everywhere in philosophy. What, then, are its properties and types? Many types of «because» and so of explanation have been distinguished, for example causal and conceptual explanation. I consider three putative examples of explanation – the normative «because», the «because» of philosophical theory and the large class of explanations which refer to the nature or essence of something and raise and attempt to answer three questions: What are the relations between these three types of explanation? Is explanation mind-dependent? When is the introduction of a type of «because» merely ad hoc?

Review. Mulligan tries to understand if a semantics for different kinds of "because" is possible. He distinguishes, at first, three types of because: the "normative because", the "philosophical because" and the because used in explanations referring to nature or essence of something.

Afterwards he characterizes personal and impersonal explanations; the first ones are presented in the form «x explains to $y\ldots$», while the others are of the form «the fact that p explains the fact that q» or «q because p». Even if "because" is not itself a relational word it could be said that when we say «q because p» we express a relationship between "p" and "q". Different kinds of explanations can generate different kinds of because*s*:

- the causal because (A can't see nothing *because* there's fog);
- the because of theoretical reduction (this is an equivalence relation *because* it is symmetric, reflexive and transitive);
- the because of subjective reasons (A ate the ice cream *because* she thought it was tasty);
- the objective reasons because (A ate the ice cream *because* it was tasty);
- the normative because (A went to prison *because* homicide is a crime);
- the essential because (the proposition p is true *because* the state of affairs described by p occurs);
- the because of essence (x and y are distinguished *because* of their essences).

Mulligan distinguishes uses of because as pure-connective, as in «q because p», as a hybrid, viz. «q because of x» and as non-connective; the last one is related to mental operations, so it's also called "mind-because". The relation between non-connective (mental) because and because as connective (linguistic) is similar to the relation between negating and negation, conjoining and conjunction, and so on. Now, is it possible to define a semantic value for statements containing both these uses of because?

Mulligan also individuates because of essence and essential because. The because in

> If <Sam is sad> is true , then <Sam is sad> is true because Sam is sad.

is different from the because in:

> If <Sam is sad> is true , then <Sam is sad> is true because the state of affairs [Sam is sad] occurs.

The first kind of because expresses a relation between "Sam is sad" and a proposition, state of affairs etc., but it is not grounded in the nature of objects and properties and therefore it does not involve any because of essence, while in the second case the truth of "Sam is sad" depends on the nature of the state of affairs and obtaining. If facts make propositions true, they do so in virtue of their nature; on the contrary if Sam falls under the property of sadness, because Sam exemplifies sadness, then this is because of the nature of sadness (or because of the nature of properties in general). Necessary conditions for having an essential because are an utterance <a> and one of the following: a state of affairs (related to his obtaining), a proposition (truth-value), a concept (exemplification), a property (satisfaction), a class (membership), etc.

Different kinds of "because" produce different kinds of analyses, and Mulligan explains this view with a moral example based on Moore's analysis of moral rightness. Moore's analysis modified can be expressed as follows:

(1) An action is morally right
iff

(2) it leads to more intrinsically valuable pleasure or less intrinsically disvaluable pain than any other action open to the agent
and

(3) if (1), then [(1) because$_{\text{essential}}$ (2) because$_{\text{essence}}$ of the nature of comparative value and of consequences]

In this analysis, both (1) and (2) express normative propositions. An analysis modified in a naturalistic way is the following (note the different because*s* used):

(4) An action is morally right
iff

(5) it leads to more pleasure or less pain than any other action open to the agent
and

(6) if (4), then (4) because$_{\text{normative}}$ (5)

In this second analysis, (4) expresses a normative proposition, while (5) expresses a proposition about a wholly natural state of affairs. In the proposed analyses, we can see the difference between the normative because (which expresses a normative necessitation) and, again, the because of essence already defined.

Thanks to his analysis Mulligan can claim that mind and connective because allow a semantic value; such a thesis is possible because the members of each couple of mental acts and connectives are mutually dependent, in a range of various possible ways shown during the talk.

2.2 *The Deconstruction of Social Unreality*
Dan Sperber (Jean Nicod Institute, Paris & International Cognition and Cultural Institute)

Abstract. John Searle has famously argued (in particular in *The Construction of Social Reality* and *Making the Social World*) that social facts exist in virtue of being collectively recognized. In this talk, I deconstruct Searle's social ontology and outline an alternative.

Review. Sperber starts by considering Searle's works, *The Construction of Social Reality* and *Making the Social World*, where it is stated that collective recognition of a social fact is a necessary condition for the existence of the fact itself. Sperber highlights some errors in the main social ontology theories: on the one hand the attribution of a causal role to supernatural forces (in folk social ontology), and on the other hand the attribution of such a status to so-called Cambridge properties, i.e. properties which do not add anything to the individuals (in scholarly ontology). Every social ontology theory is expected to account for the distinction between institutional facts and mere Cambridge changes: in Searle's point of view the collective recognition and the acceptance are fundamental elements in such a distinction. Following Sperber's talk, one may ask: are these conditions both necessary and sufficient? Assuming Searle's theory, what happens to the fact itself?

Social facts are divided into two main kinds: institutional and brute facts, and they differ upon the presence of a conceptualization and its absence (take as example rumors, which are brute facts, and verdicts, institutional). An epidemiological and environmental approach shows that social facts consist of causal chains linking events in the mind of individuals (in a sub-personal or infra-individual fashion too) and events taking place in the environment. The fundamental tools used by Sperber are the followings:

- Public and Mental Productions;
- Cognitive Causal Chains (*CCCs*): a very intuitive example of such a chain is the one which links an environmental stimulus to the identification of the stimulus itself by means of perception (Figure 1).

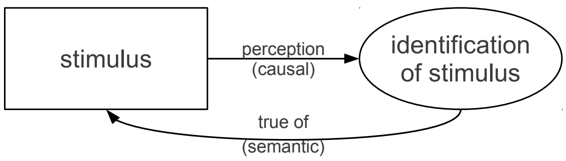


Figure 1: Basic example of a *CCC*.

A further example is the *CCC* which links two beliefs to a third one, due to inference (Figure 2);

- Social *CCCs* (*SCCCs*): these are defined as *CCCs* which establish content relationships between individuals through modifications in the common social environment, e.g. testimony, request, reminder, argument. Causes and effects could be alternatively mental or public. Mental links are described in terms of naturalized psychology, whereas public ones are described in material terms;
- Cultural *CCCs* (*CCCCs*): these are *CCCs* which establish social contents across population (Figure 3);

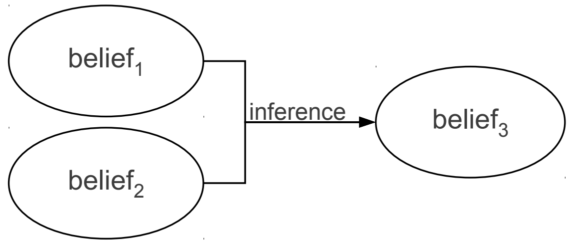


Figure 2: *CCC* of an inference.

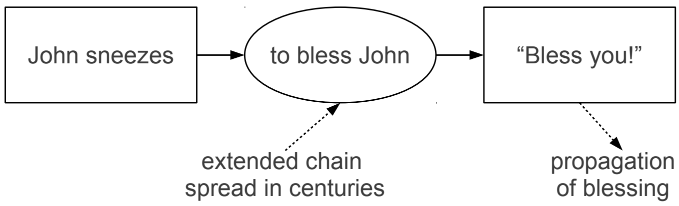


Figure 3: Example of Cultural *CCC*.

- Institutions (*ICCCs*): institutions are higher level representations which play a causal role in propagating lower level representations.

In Sperber's Social Ontology, something is said to be social as long as it is embedded in a *SCCC*, and something is cultural as long as it is in a *CCCC*. In conclusion, Cambridge properties are considered in order to provide focal points for social coordination, even though they are causally inert, and institutional facts are just brute facts. No role at all is played by recognition and acceptance.

2.3 *Psychologism*
Tim Crane (University of Cambridge)

Abstract. Psychologism about logic is the view that the laws of logic should be explained in terms of laws of psychology. In the 20th century, philosphers have tended to follow Frege and Husserl in rejecting psychologism about logic. But in late 20th century analytic philosophy, Frege also inspired an anti-psychologistic approach to the study of linguistic meaning: those who follow Frege understand meaning in terms of his notions of sense and reference, or closely related notions. This is what we might call *psychologism about meaning*. Some have goe even further, and used the notions of sense and reference as foundational notions in the study of intentionality annd mental content generally. This is what I call *anti-psychologism about psychology*. In this lecture, I will argue that whatever the merits of the other forms of anti-psychologism, anti-psychologism about psychology has little to recommend it. In particular, I will argue that in order to understand the relationship between consciousness and intentionality, we need to return to a fully psychologistic conception of the mind, and therefore of intentionality.

Review. Crane's talk is focused upon a defense of psychologism (P) in the field of psychology, against the attacks moved by anti-psychologistic (AP) point of view in contemporary philosophy. He starts claiming that forms of intentionality can be both conscious and inconscious (viz. perceptual experience versus perception): why is intentionalism about consciousness invisible to some philosophy? Crane suggests that AP entails a particular way to intend mental representations. Quoting Burge's analysis of perception, the idea that perception is the ascription of properties (more or less accurately) to an object, Crane claims that no feature of predication (act of predication and articulation of a symbolic structure) is related to conscious experience. We need then a new definition of perception able to account for the intentionality of our experience. He proposes to use Frege's notion of idea (*Vorstellung*): the content of consciousness distinguished from the object of the thought. Examples of ideas (forms of intentionality) are images, feelings, inclinations and also sense-impressions. The latter allow Crane to establish a relationship between perception and predication.

Rejection of P is said to be one of the most important successes of analytic philosophy in the 20^{th} century, and it is mainly due to Frege (in the field of logic), Dummett (in semantics), and McDowell (in psychology); the latter criticizes P claiming that it is possible to reduce intentionality to *Sinn* and *Bedeutung*, so that it needs to appeal to semantic facts. Showing that some aspects in the phenomenology of perceptual experience can be related to intentionality of experience, Crane claims that not every aspect of perception is determined only by semantic elements. Hence, semantic conception of representation does not give an adequate account of the representation involved in perceptual experience, while P does so by returning to Frege's ideas.

These two theses establish a defense for psychologism in psychology.

2.4 *Rearing Relationships as a Key to High Moral Status*

Agnieszka Jarowska (UC Riverside, University of California) with Julie Tannenbaum (Pomona College)

Abstract. In this paper we address the seemingly commonsense idea that babies and severely cognitively impaired human beings have a greater moral status than most (but not necessarily all) non-human animals. Thus far, no philosopher has successfully defended this view. We argue that the difference in their moral status can be explained by the fact that most human being who are not already cognitively (rationally of emotionally) sophisticated can, while most animals cannot, participate in what we call "rearing relationship". When a baby or a cognitively impaired human being engages in certain activities in the context of a rearing relationship, this transforms the metaphysical nature, and so also the value of those activities. A human being's capacity to engage in these transformed activities shares core features with the very capacity – cognitive (intellectual or emotional) sophistication – that most philosophers grant explains why unimpaired adult humans have a higher moral status than most animals. Moreover, we show that animals, such as dogs, do not have the ability to participate in rearing relationships.

Review. The main goal of Jarowksa's talk is to argue that babies and cognitive impaired adults have a higher moral status than animals with similar cognitive capacities. The difference in moral status depends in the capacity to engage in activities transformed by so-called "rearing relationships": while this capacity is found in babies and in most cognitive impaired human beings, it's absent from otherwise cognitively similar animals. The talk is grounded in a strong assumption, i.e. that an action's nature and value can be transformed by the end of the action itself: an activity is not only valuable as a means toward a valuable end, but it also has, to a certain degree, the same value of the end. This assumption is needed by the authors to establish the role of rearing relationships in transform the activities of babies and other subjects.

The most important definition (i.e. what is to be understood with "rearing relationship") is given by means of the concept of Self-Standig Person (SSP). A SSP has sophisticated intellectual and/or emotional cognitive capacities, which are to be considered valuable, and thus he/she has full moral status. A relationship is a "rearing relationship" if:

(1) the rearer aims to transform the rearee into an SSP (the paradigmatic case is the one involving parents and babies);

(2) the rearee cooperatively engages in those activities the rearer proposes in order to transform the rearee into an SSP;

(3) the rearee's activities are incomplete versions and realizations of the activities that characterize an SSP (evaluative judgements, caring,. . .).

Now, condition (3) is a crucial one: if the rearee engages in activities transformed by some kind of rearing relationships, then the rearee's capacities count as incomplete realizations of SSP-capacities (and so the formers share a source of the latters' value); of course, the incompleteness of the rearee's capacity is relevant, but only to the *degree* of the moral status they confer. As stated before, an SSP has moral status due to the value of his/her capacities, therefore a rearee too has moral status (because his/her capacities have value).

The author's conclusion follows from the observation that the activities of most animals *are not* incomplete realizations of SSP-activities and so condition (3) is not met: animals' activities are not embedded in rearing relationships, therefore animals are not and will not be SSPs (thus they have lower moral status).

2.5 *Non-Persistent Truths*
Andrea Bonomi (San Raffaele University, Milan)

Abstract. Temporalism is the idea that the content expressed by an utterance of a sentence S (in a given context) can change its truth-value over time. Starting from Prior's indeterminism, formalized in his tense logic, metaphysical arguments are often presented to support this view. In my contribution I discuss some independent reasons for developing a temporalist semantics, in accordance with intuitions underlying a quite common use of future oriented statements. The basic idea is that such statements involve an epistemic component (determined by plans, schedules, motivated intentions, and so on) which can change as time goes by. Hence the possible truth-value transitions required by some peculiar uses of phase adverbs like 'no longer', 'still', 'again', etc.

The main feature of the semantics developed here is that an essential ingredient of the utterance context, i.e. the utterance world, is seen as an evolving reality which can be associated to different backgrounds of assumptions and, as a consequence, to different conditions of evaluation.

Review. Bonomi's aim is to discuss some reasons for developing a temporalist semantics independently from Prior's indeterminist (future-open) metaphysics, and to sketch such a semantics. Temporalism is the idea that the content expressed by utterances of a sentence α can change its truth-value over time. Evans (1985) argued against temporalism, stating that the evaluation of utterances should be in accordance with a Stability Principle (SP): whether the evaluation (correct, incorrect) of an utterance is fixed at t so it is for every $t' > t$. So even if the proposition expressed by the utterance could change its truth value, the evaluation of the utterance is anchored to t.

Every utterance takes place into a context made by the utterance-time, and the utterance-world $<t,w>$. Therefore, correctness could be stated as follows: the utterance of α is correct at $<t,w>$ iff α is true at time t at world w. Indeterminists follow Prior arguing against the adequacy of this definition: if one considers a future-tensed sentence expressed by an utterance at time t, then one should consider a plurality of world, viz. those metaphysically possible at utterance time t. So the evaluation of the utterance may depend upon the world one is considering.

Independently from any metaphysical discussion of the asymmetry between past and future, Bonomi aims to argue against SP by considering some intuitions underlying the use of future-oriented statements in natural languages. Let's consider the following case:

(1) S knew that α

where α is a future in the past sentence (as in "S knew that he would do…"). Suppose that the utterance of (1) is intuitively correct at time t; suppose now that at time $t' > t$ something happens and as a consequence α is false at time t'. So, given that *know* is a factive verb, the utterance of (1) at t' is to be considered incorrect. This invalidates SP, showing that it is not always applicable.

How do we give a semantics for such kind of phenomena? Bonomi suggests that different moments in time should be associated with different possible worlds, in order to account for future-tensed sentences. In future in the past cases truth and reference do not depend upon the way the world will actually be, but upon the information about the expected course of the events. Bonomi gives many examples of this kind of phenomena, calling them "non-persistent truths", using temporal adverbs as "no longer", in support of a variability principle:

it may happen that the statement made, in an appropriate context, by uttering a future-tensed sentence turns out to be true (false) at a given time *t*, but no longer true (false) at a time *t'* > *t*. The evaluation of these sentences crucially depends on the context <*t*,*w*>, because a change in <*t*,*w*> could entail a change in the set of available context (future possibilia).

Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

BRAIN-IN-A-VAT EXPERIENCE

proposto da Giorgio Sbardolini

Il gioco di questo numero è ispirato a una lunga serie di celebri giochi logici escogitati da Raymond Smullyan. Ne propongo una versione, per così dire, commerciale. Smullyan è giustamente conosciuto e tradotto: tra le sue opere più famose sono disponibili in italiano *Qual è il titolo di questo libro?* (Zanichelli, 1981) e *Donna o tigre?* (Zanichelli, 1985) da cui proviene, in particolare, l'idea per il prodotto che viene qui reclamizzato. Buon divertimento!

Oggi, per strada, ho incrociato alcuni ragazzi che distribuivano questo volantino:

> Stiamo lanciando sul mercato il più grande prodotto tecnologico dell'anno! Il rivoluzionario *Brain-in-a-vat Experience!* Si tratta di un dispositivo, molto pratico da indossare che, tramite alcuni elettrodi ed un magnete, ti consentirà di vivere esperienze bellissime e vividissime, tramite l'interazione con il mondo che avrai la possibilità di esplorare. *Brain-in-a-vat Experience!* è assolutamente sicuro per la salute. *Brain-in-a-vat Experience!* salverà automaticamente i tuoi progressi ad ogni risveglio, in modo da proseguire la tua esperienza al prossimo sonno.
> Massima comodità con *Brain-in-a-vat Experience!*: un nostro incaricato sarà sempre pronto a collegare e scollegare il tuo dispositivo, in modo che non debba preoccuparti di questo inconveniente appena svegli o desiderosi di riposare.
>
> *Enhance your sleep with Brain-in-a-vat Experience!*

E poi più sotto, in piccolo, c'era scritto:

> *Controindicazioni*. Attenzione: alcune persone potranno avere delle difficoltà a sapere in un dato momento se sono sveglie o addormentate. Al momento dell'acquisto di *Brain-in-a-vat Experience!* riceverete pertanto una pillola in omaggio. Benché siano tra loro completamente indistinguibili, ciascuna pillola ha uno di due tipi. Tutti coloro che assumono la pillola *Experience! Giorno* acquisiscono la caratteristica che tutto ciò che credono mentre sono svegli è vero, e tutto ciò che credono mentre stanno usando *Brain-in-a-vat Experience!* è falso. Tutti coloro che assumono la pillola *Experience! Notte* acquisiscono la caratteristica che tutto ciò che credono mentre stanno usando *Brain-in-a-vat Experience!* è vero, e tutto ciò che credono mentre sono svegli è falso.

Subito ho trovato molte cose da chiedere ai ragazzi che distribuivano il volantino, ma non a tutto hanno saputo rispondermi:

AUTORE. Giorgio Sbardolini. giorgio.sbardolini@gmail.com

1. Dato che, in un particolare momento, c'è una persona che crede di aver assunto la pillola *Giorno*, si può determinare se è corretto? Si può dire se era sveglio o no in quel momento? E se quella persona avesse creduto di aver assunto la pillola *Notte*?

2. È vero che le credenze delle persone su di sé non cambiano mai, né sull'esser svegli o meno, né sull'aver preso la pillola *Giorno* o meno?

3. È possibile che un tale creda di star usando *Brain-in-a-vat Experience!* e di aver preso la pillola *Giorno*?

4. Immaginiamo che ci siano due coppie di coniugi: la prima sono i Bianchi. Il signor Bianchi crede che lui e la moglie hanno preso la pillola *Notte*. La signora Bianchi crede contemporaneamente che entrambi hanno preso la pillola *Giorno*. In effetti, solo uno di loro sta usando *Brain-in-a-vat Experience!*. Chi di loro è sveglio? La seconda coppia sono i Rossi. Uno di loro ha preso la *Giorno* e uno la *Notte*. La signora Rossi crede che sono entrambi svegli o che stanno usando entrambi *Brain-in-a-vat Experience!*. Il marito crede il contrario. Chi ha ragione?

5. Un altro tizio crede che egli e la propria sorella abbiano entrambi preso la pillola *Notte*, e anche che lui ha preso la pillola *Giorno*. Com'è possibile?

Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 © http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

IN RISPOSTA A: «LA LIBERTÀ DI NON ESSERE LIBERI. ARGOMENTI A FAVORE O CONTRO IL LIBERO ARBITRIO»

Proposto da Leonardo Caffo

Matteo Grasso

La seconda edizione della rubrica *Magister Ludi* si conclude con la premiazione dell'articolo "Metalibertà e libertà regionali: dilemmi e paradossi del libero arbitrio" di Matteo Grasso, in risposta alla proposta filosofico-ludica "La libertà di non essere liberi", pubblicato sul numero precedente di questa Rivista.

Il lavoro di Grasso è un'analisi che tiene conto, tanto della storia dei problemi connessi al libero arbitrio, quanto della loro struttura argomentativa, in cui un'attenzione particolare viene riservate alle insidie che si nascondono dietro alla questione delle "scelte individuali ed intenzionali". L'autore inoltre non manca di sottolineare le connessioni tra il gioco proposto e le teorie filosofiche – "determinismo" e "indeterminismo" – riuscendo ad analizzare, con lucidità, le connessioni tra fisica e filosofia che, tuttavia, riescono a dialogare pur rimanendo "vocabolari diversi" proprio come insegnava Wittgenstein, non inficiando dunque le questioni riguardo le libertà individuali, ben discusse entro la letteratura filosofica contemporanea. Per questi motivi l'articolo di Matteo Grasso può essere considerato, oltre che una soddisfacente risposta alla consegna del nostro piccolo gioco, un buon esempio, a livello studentesco e non solo, del lavoro filosofico di analisi dell'argomentazione che RIFAJ promuove ormai da quasi due anni.

In chiusura ricordo che l'articolo è stato selezionato a mia discrezione; la versione qui presentata è integrale e non è stata oggetto di *peer-review* da parte del comitato scientifico della rivista. Alleghiamo dunque la risposta di Grasso, nella sua originalità.

Leonardo Caffo

AUTORE. Matteo Grasso. matteo.grasso@studenti.unimi.it

Meta-libertà e libertà regionali: dilemmi e paradossi del libero arbitrio

Il problema del libero arbitrio è uno dei più spinosi e discussi di tutta la storia della filosofia (e del pensiero in generale), non a caso David Hume lo descrisse come "la più complessa delle questioni filosofiche". Tale problema sorge innanzitutto dall'intuitiva incompatibilità che si ritrova quando si congiungono proposizioni (pensieri) come: "Io sono libero di scegliere le mie azioni" e "il mondo è dominato da leggi a cui tutto deve sottostare, inclusa la mia volontà".

Quello che propongo in questo breve scritto è di inquadrare la questione del libero arbitrio entro una cornice che mostra la profonda contraddittorietà del concetto. Questo breve testo si articolerà in due parti principali: la prima volta a mostrare quali problematiche nascano nel considerare la libertà come una proprietà predicabile di qualsiasi tipo di azione (in particolare di alcuni tipi particolari di scelte sulla libertà che richiedono una sorta di "meta-libertà"); la seconda volta a mostrare come anche l'ipotesi che prevede "libertà regionali" risulti problematica per domini di applicabilità specifici.

I

Il concetto di libertà è certamente per sua natura molto problematico, ma le nostre intuizioni su di esso ci portano ciononostante a qualche tipo di certezza. Appellandoci al senso comune e all'intuizione potemmo infatti definire la libertà come una proprietà di quelle azioni che non sono vincolate, di quelle scelte che non sono viziate e di quelle decisioni di cui dovremmo a buon diritto assumerci tutta la responsabilità.

Se le intuizioni del senso comune ci aiutano per una definizione generale, tuttavia, alcune problematiche molto spinose non tardano a presentarsi non appena ci si concentri su qualche enunciato particolare. Un esempio magistrale ed emblematico che fa emergere con chiarezza la contraddizione insita nel concetto di libertà è il *dilemma*[1] che dà origine a questo *magister ludi*, che riassumo brevemente così: la domanda "siamo liberi di non avere il libero arbitrio?" porta inevitabilmente a negare di averlo perché "se siamo liberi di farlo non abbiamo un libero arbitrio" e "se non siamo liberi di farlo non abbiamo un libero arbitrio".

Il dilemma discusso include fra le proprie premesse un concetto intuitivo di "libertà", a cui fa corrispondere una proprietà che può essere predicata di (potenzialmente) qualsiasi tipo di azione. Potremmo chiamarla libertà di secondo livello o "*meta-libertà*" per le ragioni che vedremo fra breve. Il dilemma, infatti, nasce proprio nel momento in cui la proprietà "essere liberi di" viene predicata dell'azione che consiste nello "scegliere di non avere il libero arbitrio". È così che la domanda: "siamo liberi di non avere il libero arbitrio?" produce un effetto ben noto nella storia del pensiero. Enunciati di questo tipo sono infatti parenti del famoso paradosso di Epimenide (o del mentitore), di cui si ritrovano infinite versioni: "io mento", "questo enunciato è falso", "l'enunciato seguente è falso e l'enunciato precedente è vero", "questo enunciato non sono dimostrabile nel sistema X" e così via... Queste proposizioni possiedono una naturale propensione a generare paradossi e sono spesso utilizzati come base per "argomenti gödeliani".

Nel caso che ci troviamo ad analizzare non costituisce una grande scoperta rendersi conto che il concetto di libertà conduce inevitabilmente a questo tipo di sorte: come abbiamo visto,

[1] Per "dilemma" qui si intende: problema che offre un'alternativa fra due o più soluzioni, nessuna delle quali si rivela, in pratica, accettabile.

infatti, se la libertà è predicabile di *qualsiasi* azione, allora è predicabile anche della scelta di non essere liberi, e questo genera il dilemma in questione.

Un'analisi più fruttuosa e forse più interessante dovrebbe invece riguardare quali possibili alternative sussistono per salvaguardare il concetto di libertà. Per ricorrere sempre all'intuizione del senso comune si potrebbe infatti pensare che il concetto di libertà non sia necessariamente onnicomprensivo, che non debba per principio applicarsi a qualsiasi dominio. Il concetto di libertà infatti può essere salvaguardato anche se sussistono casi in cui esso non trova applicabilità. Potrebbe continuare l'uomo della strada: "nessun uomo è libero di infrangere le leggi della fisica o di governare con la propria volontà il battito del proprio cuore, ma questo non significa che la libertà non esista *in toto*: possiamo decidere se alzarci o stare seduti, se incominciare a parlare o tacere. Insomma: siamo liberi di fare tutto e solo ciò che effettivamente abbiamo la possibilità di scegliere di fare (o non fare)".

Il concetto di libertà potrebbe acquisire, dunque, maggiore legittimità se circoscritto ad un ambito più specifico, se dovesse sottostare a particolari criteri di applicabilità?

II

Detto in parole semplici potremmo considerare il libero arbitrio non come qualcosa che possiamo decidere o meno di avere, ma come qualcosa che abbiamo o non abbiamo e basta, proprio come godiamo di alcune proprietà fisiche come l'estensione, il colore, la massa... In particolare, potrebbe non sembrare molto strano che il libero arbitrio sia compatibile con la mancanza di libertà di non averlo. Detto in altre parole: il moto di un corpo può essere considerato libero se i suoi movimenti non sono limitati da alcuna forza ma avvengono nel solo rispetto delle leggi della fisica. Il moto di un corpo che non rispetti queste ultime non sarebbe più libero, sarebbe semplicemente impossibile. Ragionando per analogia: il libero arbitrio sarebbe come una proprietà fisica, il fatto che chi lo possiede lo possieda di necessità non limita in alcun modo la sua libertà. Si potrebbe anche dire: esso costituisce *l'orizzonte di esercizio* della libertà e non può esserne al contempo un *caso di applicazione*.

Torniamo al quesito precedente: "Il concetto di libertà ha maggiore legittimità se circoscritto ad un ambito più specifico, se dovesse sottostare a particolari criteri di applicabilità?" L'ipotesi che prevede solamente "*libertà regionali*" risulta meno problematica? Per rispondere a questa domanda dovremmo già disporre di una buona definizione di cosa sia la libertà, oltreché di una discreta pratica nell'attribuire questa proprietà a differenti tipi di agenti. Dovremmo per esempio poter dire: x è libero se e solo se possiede la proprietà P. Fatto ciò potremmo in seguito dedurre: dato che x possiede la proprietà P, allora x è libero. Allo stato attuale non siamo in possesso di una tale concettualizzazione della libertà. Possiamo al più sostenere che ad essere liberi sono solamente gli agenti, ma che non tutti gli agenti sono liberi.

La mancanza di una tale definizione solida e univoca non è tuttavia necessaria. Interrogarsi sulla potenziale utilità delle nostre intuizioni in questo ambito può costituire un interessante punto di partenza verso la chiarificazione. Per cominciare a rendere esplicito il contenuto intuitivo delle nostre idee sulla libertà è sufficiente, ad esempio, riflettere su questo snello ragionamento controfattuale:

(1) Se nel momento in cui dovessimo prendere una decisione non avessimo almeno due alternative fra cui scegliere, se cioè anche volendo non potessimo fare altrimenti che fare ciò che scegliamo di fare, allora non potremmo attribuire a noi stessi alcuna libertà.

Sulla base di questo ragionamento intuitivo possiamo formulare una *prima condizione di un'azione libera*, ovvero la "*possibilità di fare altrimenti*".[2] Possiamo dire che un'azione è libera innanzitutto se c'è possibilità di scelta, se esistono alternative reali di cui solo una si realizza proprio a causa della deliberazione.

La strategia di utilizzare le nostre intuizioni per costruire ragionamenti controfattuali si è dimostrata utile. Inoltre, il criterio della "possibilità di fare altrimenti" risulta particolarmente interessante alla luce dell'accento posto dalla fisica novecentesca sul ruolo centrale dell'*indeterminismo* nella realtà. L'indeterminismo sembra offrire un'ottima base metafisica per giustificare la possibilità di corsi d'azione alternativi, in quanto in un mondo indeterministico ogni evento non è determinato dagli eventi precedenti e quindi esiste più di un futuro possibile, più di una piega del tessuto spaziotemporale ramificato che la "sottile linea rossa" del presente può effettivamente prendere.[3]

Tuttavia questa posizione, rifiutando la determinazione causale degli eventi, non può giustificare il fatto che l'agente abbia un ruolo nel determinare quale di questi corsi d'azione alternativi venga intrapreso. Recentemente è stato formulato un teorema, nell'ambito della fisica quantistica, volto a dimostrare che il libero arbitrio esiste per il fatto che esistono eventi indeterministici legati alla scelta. I fisici John H. Conway e Simon B. Kochen hanno sostenuto che la scelta di due sperimentatori di misurare determinate caratteristiche dello spin di due particelle "intrecciate" (entangled) è un evento libero perché l'esito di tale scelta non può essere determinato a partire dalle conoscenze sullo stato dell'universo precedente all'esperimento. Questo porta direttamente alla tesi del "Teorema del libero arbitrio" formulato dai due fisici, che asserisce: "se gli uomini sono dotati in qualche misura di libero arbitrio, sulla base di certe assunzioni, lo stesso deve valere anche per alcune particelle elementari.".[4]

Il fine della nostra ricerca, dunque, non è ancora stato raggiunto perché la prima condizione della libertà produce, in casi particolari, risultati poco soddisfacenti: se per connotare un'azione come libera fosse sufficiente la sola "possibilità di fare altrimenti", allora la maggior parte degli eventi casuali dovrebbe a pieno titolo godere di libero arbitrio. Per esempio, dovremmo considerare libero l'evento casuale costituito dal decadimento dell'atomo di sostanza radioattiva che causa la rottura della fiala di cianuro, la quale a sua volta causa la morte del gatto di Schrödinger, dentro la famigerata e macabra scatola.

La "possibilità di fare altrimenti" è sicuramente una condizione necessaria, ma non è sufficiente come criterio per la libertà. Lungi dal disperare per l'apparente fallimento, possiamo proseguire nell'analisi delle nostre intuizioni mediante il ragionamento controfattuale. Un'altra riflessione sembra infatti cogliere caratteristiche importanti per il nostro concetto di libertà:

(2) Se nel momento in cui dovessimo prendere una decisione l'esito di essa non fosse determinato in gran parte dalla nostra stessa e sola volontà, allora non potremmo attribuire a noi stessi alcuna libertà.

Un esempio sufficiente a mostrare l'inadeguatezza di questa condizione è il semplice lancio di un dado. In questo particolare caso è evidente come la prima condizione di un'azione libera, la *possibilità di fare altrimenti*, sia rispettata (vi sono almeno sei possibili esiti alternativi a cui l'azione dell'agente può dare luogo), ma nessun giocatore d'azzardo che non sia decisamente superstizioso ammetterebbe che il numero uscito sia completamente frutto della propria volontà. Possiamo quindi, aiutandoci con una definizione kantiana, definire la

[2]Per un'analisi più ampia delle condizioni della libertà di veda: (De Caro, 2004).

[3](Belnap et al., 2001).

[4](Conway and Kochen, 2006).

seconda condizione di un'azione libera: l'autonomia delle proprie scelte (in opposizione all'eteronomia[5]) o più semplicemente "l'*autodeterminazione*" delle proprie azioni. Detto in altre parole: un'azione libera deve presupporre un agente che la attui, e tale agente in qualche senso deve avere l'intenzione di compierla: l'agente dà avvio ad una catena causale in cui desideri, intenzioni e credenze hanno un ruolo nel determinare l'azione ed il suo esito.

Potremmo pensare, giunti a questo punto del ragionamento, di aver risolto la questione: abbiamo infatti stabilito due criteri all'apparenza disgiuntamente necessari e congiuntamente sufficienti per giudicare un'azione come libera. Tuttavia anche alla luce di questi ci troveremmo in seria difficoltà se tentassimo nuovamente di approcciare la domanda che abbiamo lasciato in sospeso: "Il concetto di libertà ha maggiore legittimità se circoscritto ad un ambito più specifico, se dovesse sottostare a particolari criteri di applicabilità?" Anche assumendo che le due condizioni che abbiamo identificato siano soddisfacenti, ci troveremmo ancora a dover restringere l'ambito di applicabilità del nostro concetto di libertà (indebolito).

Come abbiamo affermato in precedenza, vi sono sicuramente due domini all'interno dei quali predicare la libertà delle azioni comporta conseguenze paradossali o semplicemente spiacevoli. Il primo è l'ambito delle scelte sulla libertà stessa (viene quindi esclusa quella che in precedenza abbiamo definito come "libertà di secondo livello" o "meta-libertà"): questo dominio va escluso per evitare il dilemma generato dalla "scelta libera di non essere liberi". Il secondo ambito è quello delle leggi della fisica, o più in generale di tutti quei domini in cui il fatto di non essere liberi di compiere un'azione non implica una mancanza di libertà per l'individuo (abbiamo visto come esempio quello di infrangere le leggi della fisica o della fisiologia, ma potremmo aggiungere "la libertà di essere qualcun altro", "la libertà di vivere senza cervello", "la libertà di immaginare un rotondo-quadrato", "la libertà di non essere ingannati dall'illusione di Müller-Lyer", e così via. . .).

Nonostante l'aver identificato alcuni domini da escludere costituisca un discreto risultato, non è certo possibile procedere senza un metodo più generale ed efficace. E tuttavia proprio adottare un metodo più generale, come vedremo, condurrà il nostro ragionamento ad un inevitabile *cul de sac*. Un metodo generale che si ritrova ampiamente nel dibattito contemporaneo sul problema del libero arbitrio è quello di valutare direttamente se l'idea di libertà sia compatibile o meno con due visioni alternative e mutuamente escludenti della realtà: il determinismo e l'indeterminismo.[6]

Nel caso del determinismo potremmo infatti ipotizzare che parecchi altri domini siano da escludere per le stesse ragioni secondo cui abbiamo escluso il dominio della realtà fisica, e cioè per la rigidità e l'ineluttabilità delle sue leggi. Se la realtà fisica nel suo complesso fosse deterministica, allora quella stessa rigidità ed ineluttabilità andrebbe generalizzata a qualsiasi dominio e livello: dalle interazioni fondamentali nel micromondo delle particelle subatomiche a quelle dei corpi celesti del macrocosmo. Il dibattito filosofico e scientifico ha visto da sempre accesi scontri sulla questione, ma probabilmente una delle più eleganti definizioni di un universo deterministico è tuttora quella del marchese Pierre Simon de Laplace:

> Possiamo considerare lo stato attuale dell'universo come l'effetto del suo passato e la causa del suo futuro. Un intelletto che ad un determinato istante dovesse conoscere tutte le forze che mettono in moto la natura, e tutte le posizioni di tutti gli oggetti di cui la natura è composta, se questo intelletto fosse inoltre sufficiente-

[5](Kant, 1788).

[6]La strategia di ipotizzare una concezione della realtà "mista", assumendo per esempio la compresenza dell'indeterminismo a livello quantistico e del determinismo a livello meso-macroscopico, non risolve il problema perché se in ultima analisi è impossibile concepire un evento che sia contemporaneamente determinato ed indeterminato, allora è anche impossibile che uno stesso evento possieda entrambe le condizioni di un'azione libera descritte in precedenza.

mente ampio da sottoporre questi dati ad analisi, esso racchiuderebbe in un'unica formula i movimenti dei corpi più grandi dell'universo e quelli degli atomi più piccoli; per un tale intelletto nulla sarebbe incerto ed il futuro proprio come il passato sarebbe evidente davanti ai suoi occhi.[7]

Riflettendo sul determinismo infatti ci troviamo impigliati in questo ragionamento:

- se il mondo è deterministico allora ogni stato dell'universo è "l'effetto del suo passato e la causa del suo futuro", e quindi è completamente determinato dall'istante precedente e determina a sua volta completamente lo stato dell'universo all'istante successivo. Se le cose stanno così allora in un universo deterministico la prima condizione della libertà, la possibilità di fare altrimenti, è del tutto impossibile che si realizzi perché esiste sempre e solo un unico futuro, un solo corso degli eventi possibile da intraprendere per ogni singolo istante.

L'alternativa al rigido e meccanico determinismo tuttavia non manca di certo. La prima metà del '900 fu caratterizzata da anni ricchi di fermento per la comparsa nel mondo scientifico di una delle teorie più affascinanti e assurde dell'intera storia pensiero: la teoria della meccanica quantistica. Tale teoria afferma (almeno secondo l'interpretazione di Copenhagen) l'esistenza nella realtà di una componente ineliminabile di indeterminismo, intrinseca e non dovuta alla limitatezza degli strumenti di misurazione. Agli occhi di molti filosofi la meccanica quantistica, proponendo una concezione dell'universo alternativa a quella del rigido determinismo, potrebbe costituire una nuova e promettente base per fondare la possibilità del libero arbitrio. Abbiamo tuttavia già notato, mediante l'analisi fin qui condotta sulle condizioni di un'azione libera, che l'indeterminismo non sembra affatto un buon fondamento:

- se il mondo è indeterministico allora ogni stato dell'universo non è l'effetto del suo passato e non è la causa del suo futuro. In un universo non deterministico qualsiasi legame di causa-effetto viene a cadere. In un tale universo la possibilità di fare altrimenti è garantita, perché ad ogni istante seguono infiniti futuri possibili con infiniti corsi d'azione alternativi ciascuno. Tuttavia, in un universo non deterministico nulla garantisce che la volontà dell'agente sia in qualche modo determinante per produrre l'effetto dell'azione che compie. In tale universo le azioni di un soggetto e le loro conseguenze non possono essere a nessun titolo autodeterminate (né etero-determinate, né determinate affatto: le decisioni del soggetto non sono nemmeno in grado di determinare il suo conseguente agire): ogni evento è solamente frutto della casualità senza alcuna causalità.

A conclusione di questa analisi ci troviamo dunque con un secondo dilemma:

- se il mondo è deterministico allora non viene soddisfatta la prima condizione della libertà, e cioè: in un mondo deterministico non esiste alcuna possibilità di fare altrimenti;

- se il mondo non è deterministico allora non viene soddisfatta la seconda condizione della libertà, e cioè: in un mondo non deterministico nessuna azione può essere autodeterminata e produrre un effetto perché ogni evento è solamente frutto del caso;

In conclusione, l'analisi del dilemma iniziale ci ha condotti ad un secondo dilemma. Possiamo riassumere le nostre conclusioni come segue:

[7](La Place, 1812).

- se la libertà viene definita come una proprietà il cui dominio di applicabilità è aspecifico, cioè come "meta-libertà", allora è sufficiente generare un "enunciato gödeliano" della forma "sono libero di scegliere di non essere libero" per produrre un dilemma per quale il concetto di libertà risulta inevitabilmente contraddittorio;
- la libertà può essere definita come "regionale", cioè come una proprietà il cui dominio di applicabilità è specifico e la cui applicabilità è regolata da due condizioni disgiuntamente necessarie e congiuntamente sufficienti: la possibilità di fare altrimenti e l'autodeterminazione delle azioni;
- se anche la libertà viene regionalizzata, cioè definita come una proprietà il cui dominio di applicabilità è specifico, è sufficiente analizzarne l'applicabilità nel contesto della realtà fisica per produrre un dilemma insolvibile: essa infatti è incompatibile sia con una concezione deterministica della realtà (che esclude la possibilità di fare altrimenti) sia con una concezione indeterministica (che esclude l'autodeterminazione delle azioni).

Riferimenti bibliografici

Belnap, N., M. Perloff, and X. Ming (2001). *Facing the future: agents and choices in our indeterminist world*. Oxford University Press, New York. 196

Conway, J. and S. Kochen (2006). The free will theorem. *Foundations of Physics 36*, 1441–1473. 196

De Caro, M. (2004). *Il libero arbitrio: una introduzione.* Laterza, Roma-Bari. 196

Kant, I. (1788). *Critica della ragion pratica*. trad. it. Laterza, Roma-Bari, 2000. 197

La Place, P. (1812). Saggio filosofico sulle probabilità. In *Opere*. trad. it. Utet, Torino, 1967. 198

Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 (cc) http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

OFFERTA DELL'ULTIMO MINUTO

Alessandro Raveggi

Né la mia stazza né la mia età mi permettono in fondo di considerare vani gli sforzi per convincere il passeggero seduto davanti al mio posto lato corridoio di questo Boeing, diretto in una città dove mi farò curare per l'ennesima volta da un male tentacolare, che dovrebbe estinguermi entro pochi mesi. E per il quale molti amici hanno considerato inutili i miei frequenti sperperi di denaro. Il passeggero in questione, del quale lo steward nero, dai denti perfetti come mentine, non si è accorto della posizione scorretta dello schienale, ora che siamo al decollo – e gli annunci hanno più volte insistito sulla corretta posizione dello schienale – è proprio quella bionda insipida dal naso pronunciato e la zazzera tagliente, che al gate numero 3 mi ha rivolto sfuggente alcuni bocconi di parole. Domandava, inciampando tra un *tu* e un *lei* di cortesia, dove fosse la toilette. Quindi se fosse quello il gate numero 3. L'aveva domandato in quel modo, come per attaccare una conversazione lasciata in sospeso da anni con un caro amico, al quale si vuole fare il gioco del *cù-cù-guarda-chi-si-rivede*. Perché il cartello verde della toilette come il 3 luminoso del gate erano ben evidenti sotto il suo occhio dal grigio esangue. Lei ha indugiato su quel *tu* e quel *lei*, si è confusa solo per riprendere il filo o temporeggiare, o anche semplicemente per cercare qualcuno con cui condividere la noia di due ore ciondolanti tra i cartelli del duty free, con un bagaglio a mano un po' troppo furbo, stretto, lungo e zeppo, in un aeroporto dove dominavano lugubri lastre ospedaliere alle pareti. Bandelle disgustose giallo pallido che ho scrutato, mentre lei vi scorreva sovrimpressa, deambulando da una parte all'altra, dandomi occhiate e poi, infine, venendo a parlarmi. Trovava una forte attrazione inconfessabile nei miei confronti? Il suo viso ancora giovane si tagliava già come una donna slava, e magari aveva voglia di spassarsela con un vecchio malato e claudicante.

Non credo adesso però di piacerle, perché lei, facendo soffrire il suo sedile, lei la donna seduta davanti a me, non si preoccupa ora se sta premendo, se sta schiacciando il sedile sulle mie ginocchia, che, per quanto circondate da cuscinetti adiposi, sono sempre ginocchia di un sessantenne e passa, messo non proprio bene. Lei si stira, ignorata da qualsiasi steward o hostess che potrebbe redarguirla. Nessuno la sfiora e la considera, dal momento in cui ha deciso di molestarmi. Ha deciso di sedersi sul mio corpo, aggiustando a piacimento il suo comfort. Vi si adagia.

Causa così l'instabilità emotiva del decollo, quando il distacco da terra potrebbe risultare fatale, polverizzando come cornflakes zuppi di sangue tutti i passeggeri in una caduta goffa e sbilenca dell'aeromobile, una fantasticheria, che aveva già altre volte attraversato la mia mente, una foglia infetta e solleticante, ritorna quindi a solleticare: che io stia entrando in contatto definitivamente con la Parca, la donna impietosa che mi estingue da dentro con uno dei suoi tanti accoliti tentacolari, distribuiti per il mondo a farle il servizio. Stavolta è venuta a ritirare personalmente il conto, a portarmi lo scontrino e ad avere il resto. La Parca, contro la quale ho speso molti dei mie quattrini come in un campagna politica tra outsider ecologisti

AUTORE. Alessandro Raveggi. alessandro.raveggi@gmail.com

e poteri forti inquinanti. Che ho maledetto e a volte ho pure pregato di incontrare, spossato di lacrime sul davanzale di casa mia a Roma, mentre curo i gerani che non vogliono più fiorire. La Parca che mi sono altre volte ripromesso di accogliere in modo gioviale, senza piagnistei. Gioviale, come lei non pare stia essendo, affatto gioviale in effetti nello schiacciarmi le ginocchia e nel mettermi lo schermetto video quasi in bocca, con le istruzioni per respirare in caso di depressurizzazione della cabina che mi si appressano alla faccia, ad imboccare forzatamente un fanciullo ritroso.

Lei si sta quindi manifestando, per una magia fluida psichica per la quale se tutti stanno in un preciso momento clou a pensare alla Parca – tutti pensano a lei prima del decollo, almeno un attimo, è evidente – allora lei si manifesta a qualcuno in particolare – cioè a me – risparmiando gli altri. E si sta manifestando così, insoffribile, schiacciando il suo sedile sulle mie ginocchia, e parlando, con la sua voce cigolante come il suo sedile bianco e azzurro – e giallo! Giallo pallido ancora, come le bandelle dell'aeroporto, forse un altro suo presagio – parlando del suo lavoro tanto ben pagato. Sempre in viaggio tra San Antonio e New York, con le camere d'albergo newyorchine che, per essere *decenti*, non devono costare meno di 250 dollari. Ha parlato alla hostess, una sola volta, per il momento, e severa, con quell'inglese così ignobile, come se avesse appena portato a termine un diploma tecnico di un raffazzonato Istituto Tecnico per il Turismo. Ora millanta pure l'elevata conoscenza delle lingue con il passeggero al suo fianco. Si lamenta del fatto che qualcuno ha spostato il tuo bagaglio nello scomparto superiore, con quell'inglese così preparatorio e macchinale. Lì, nello scomparto, ha di sicuro conservato la sua falce rugginosa e famelica, passandola come oggetto impercettibile sotto i raggi x del check-in. Per quello si lamenta. Non è facile scombinare il determinismo della Parca, senza irritarla. Anche se lei, implacabile, parla degli alloggi a New York a più di 250 dollari. E l'aereo intanto prende la rincorsa, una rincorsa da lei tenuta sul palmo. Ci farà cadere? Uno, due, tre, quattro...

Il decollo è andato, e la Parca non è venuta per me, o almeno per farmi morire in un incidente aereo, sebbene manchino ancora almeno: l'insidia possibile delle gelide Alpi, l'imprevedibile fine tragica per ammaraggio nello Stretto della Manica, o una più banale avaria del motore piombando dritto su di una minuscola cittadina scozzese che prende il nome di una vecchia contea, ora ricca di asili nido e scuole elementari. È però un dispendio di energia forse troppo grande mandare in pappa così tante persone, per far morire solo questo grassone italiano vecchio e malato che sono, dalle efelidi spruzzate in viso come da uno sputo tribale. Un italiano da buttare, che viaggi in intercontinentale, non per moda o per lavoro o per millantare di sapere le lingue o i prezzi degli alberghi a New York. Va a fare lo stupido, il sagace e il sarcastico coi dottoroni per il suo male, aggrappandosi al lettino ad ogni passaggio di stetoscopio, ad ogni risonanza magnetica. Lei lo sa. Ce l'ha scritto sul suo taccuino nel bagaglio dello scomparto superiore, c'è scritto che presto sarà il mio turno. E che devo smetterla di fare il ridicolo. O di piangere davanti ai gerani come fossi una vecchia prefica del teatro romano.

Il sedile della bionda Parca rimane nella posizione di sempre, tutto appressato alle mie gambe, e io cerco di sgusciare dalla sua oppressione regolando a mia volta il sedile. Assumo così la posizione di una sardina inscatolata, specie perché dopo poco sto sudando di quel sudore peculiare degli aerei, che fa del burro dei panini con la vinaigrette e di tutti gli odori compressi nei cartocci di cibo – che ancora non ci hanno servito – un lubrificante unico sul viso e sui miei capelli grigi, pettinati come sempre, come una volta si pettinavano i bambini mettendogli acqua di colonia, districando con violenza i nodi. Sono bloccato anche verbalmente, perché non so come protendermi, per farle un:

– Mi scusi, guardi, sa, mi sta opprimendo... – o, al limite, per tossicchiarle nervoso, farle capire che è troppo con un:

– Mm. Cof. Mm. Grr. Cof. Mm. Cof. Grr. –, oppure ancora un più aggressivo:

– Ma come diavolo ride lei? Guardi, davvero, non se ne può più. Mi sta opprimendo, da troppo tempo! Fin dalla nascita, in effetti! Strappandomi dal ventre di mia madre! Con quei problemi ai reni che mi fecero stare per mesi nella mia culla come una violacea prugna secca! Lei era lì, signora mia, con quella stessa risata!...

Nessuno però reclamerebbe alla Parca di sentirsi oppresso dalla sua risata, quella che adesso lei lancia sprecata a pallonetto al suo vicino di posto che non sa altro che annuire e spulciarsi la testa come un babbuino. Cose dell'altro mondo: lei, la Parca, dice che: No, non ha paura dei malviventi la sera mentre torna in albergo a New York – ci credo, è la Parca, le fanno un baffo i suoi scagnozzi, i suoi quaccheri... Lei che esce dal suo lavoro – o ci rientra, non si capisce – dice che non ha paura di... – come li chiama poi? – di quei tipi *caraibici* negli Stati Uniti. Sì, dice: dei caraibici degli Stati Uniti. Mi viene da ridere dell'ignoranza tutta primitiva e prelogica della mia bionda e zazzeruta Parca. Vorrei quasi alzarmi per andare al bagno, d'orgoglio, svincolarmi con un agile guizzo dalla sua morsa reclinata su di me. Svalutarla, sprezzante. Tanto lei ha già deciso tutto, e quella sua idiozia è solo una maschera di fango, pronta a squagliarsi da un momento all'altro in un gesto gotico, serioso e marziale di superbia che rivelerà il teschio notorio.

A scoraggiarmi nell'intento d'alzarmi, ci si mettono però le turbolenze, che ci fanno subito planare come sull'acqua, in tante immersioni e emersioni, accompagnate dal segnale della cintura allacciata che si accende e si spegne, con quel *ping* che ha un piccolo tratto di suono lugubre *pong* al suo inizio, come a dire:

– Eccoci, adesso ci siamo, è finita davvero, vecchietto dei gerani.

Ma penso che le turbolenze non hanno mai ammazzato nessuno, sono come il raffreddore dell'aeronautica, fastidioso ma innocuo, almeno che tutti gli aerei in volo non si mettano a starnutire all'unisono – allora accadrebbero disastri e genocidi come quello tra gli spagnoli malaticci e i prestanti indios d'America, una guerra vinta a suon di starnuti. Per morire di turbolenze, nel nostro singolo aereuccio, mi passa ancora per la mente un'immagine lugubre: queste dovrebbero essere talmente forti da farci ingoiare lo stomaco o schiantare i cervelli nello scomparto superiore, coi sedili macchiati di una sostanza simile a tanti gamberetti sminuzzati di bassa qualità in un riso di mare.

Siamo a metà viaggio, sorvolando forse un mare immenso che durerà ore là sotto. la Parca è un po' più considerata dalle hostess, si atteggia quasi ad una di noi comuni mortali che vanno all'estero a farsi vedere in stanze cristalline al cloroformio, o a rifarsi una vita, o a farsi disperdere la gioventù in una friggitrice orrenda per poche sterline al giorno in un accrescimento spirituale che andrà presto a rotoli. Lei invece ha il suo bel lavoro, non si capisce però cosa faccia di preciso, sempre in quell'albergo lussuoso di New York o tra New York e San Antonio. Cerco di intuire il suo lavoro, quando mi balla la pancia flaccida alle turbolenze sempre più insistenti, e lei si protende a raccontare ancora di se stessa, spudoratamente, al suo vicino. Capisco che ci lavora proprio, negli hotel. È un po' il factotum degli hotel, una manager dell'anticamera dell'inferno a cinque stelle, dove ognuno di noi ha il suo numero prefissato sulla chiave, chi con vista sulla palude Stigia chi verso le torri di Dite la città infernale. Chi vi arriva è come adagiato nella propria suite e viene semplicemente dato in pasto ai suoi demoni, tutto incluso nel servizio in camera: sputano i nostri denti nel piatto, i suoi cherubini trasfigurati con groppe equine, mentre ci divorano la faccia e succhiano bene i bulbi oculari come uova. Ho evidentemente molta fame e non stanno servendo niente. Ed io sono sarcofagale, in questa posizione.

Fortuna che, dopo il massaggio addominale delle turbolenze, arrivi il momento degli snack. E lei parla alla hostess quasi confidente, all'orecchio. È una cliente speciale, ovviamente, di prima classe, può avere un pasto speciale, è però seduta in classe economica, si permette una certa candidezza con la hostess: la classica sua falsa democraticità. Che starà ora bisbigliando alla hostess? Consigli su come uccidermi con una pozione letale negli snack? La ragazza in livrea, con il suo buffo aggrottare il naso da coniglio, pare assentire ai suoi suggerimenti e va dietro la tenda a prepararmi un intruglio letale, invasata come da una formula maligna, gli occhi iniettati di sangue. Arrivano infatti subito dopo dei tramezzini ripieni di salmone, assieme a una limonata in bustina da suggere come un disperato medievale, a dispetto della confezione aggiornatissima.

Potrei abbracciare la mia fine per l'ennesima volta, anche prima che i dottori stranieri possano scaricare dalla mia carta di credito italiana la loro quota giornaliera. Stavolta immagino la mia fine così: con una lingua-stiletto che mi schizza contorta contro il palato e lo fonde per incandescenza verde, fino a spezzarmi il cervelletto, come un cracker. La mia lingua azionata dal veleno. Gradirai anche tu questo salmone al curaro, Parca, specie quando la finirà con la mia bolsa esistenza, corrodendomi fino al cervelletto come una fiammella che sbuccia un sacchetto di plastica? Oppure lo snobberai come una prelibatezza da poveracci – il salmone, si sa, è uno specchietto di nobiltà per gli stupidi – lasciandomi ancora in vita, nella mia classe economica votata al risparmio performativo, di fronte agli sperperi medici e diagnostici di questi anni.

– Non è ancora il momento di avvelenarmi – faccio alla hostess italiana, che rimane interdetta, cerca di convincermi con un sorrisone. Pensa che stia scherzando, tutto goffo e reclinato all'indietro per sopravvivere alla morsa del sedile anteriore della Parca. Infatti non mi aiuta. Rimango così quel corpo affamato pieno di languore dove la Parca si aggiusta ancora la schiena e le natiche, il suo corpo piatto che forse rivelerà alcune ossa, con le anche alate e immemoriali. Io sto con una gamba tutta attorcigliata verso il fuori, sulla quale si scontrano i carrelli delle bevande nelle loro falcate, provocandomi sicuramente lividi sulla mia pelle da salamino spellato.

La Parca intanto continua a commentare a vanvera – una vera opinionista! – stavolta al riguardo del paese dal quale proveniamo, l'Italia, e le sue opzioni sono così vacue che mi viene voglia di girarmi e osservare i due innamoratini al mio fianco che si cantano le proprie canzoncine melense all'orecchio, e prendono la loro vita in prospettiva ascendente: un musical che tutti possono condividere, un musical ascendente al quale tutti possono partecipare con una sorta di karaoke in sovrimpressione che solo gli innamoratini hanno però scritto e che cantano, danzando sulle ali di quest'aereo. Là fuori dove fanno meno 90 gradi e il cielo è terso e pieno delle loro speranze impresse nelle parole del karaoke che scorrono sull'orizzonte. Ma io mi sento buio, in un angolo, col mio geranio che non vuole fiorire mai, senza karaoke né intonazione, con quei commentini della Parca sull'Italia, di sottofondo così convenzionali, così a tratti forcaioli, ripetendo quella nenia preimpostata del *si sa come funziona nel nostro Paese* e il *voglio dire, è così che si fa in Italia, sempre i soliti giri*. Che ne se la Parca dell'ignominia? Che ne sa di come si convincono i gerani a fiorire?

Ne ho abbastanza, mi metto le cuffie, strette alle orecchie, e mi sorbisco un film che ho scelto spontaneamente praticamente digitando col naso sullo schermetto video che ho davanti alla bocca. Un film in cui desidero fin da subito che a Richard Gere gli si ammuffisca la faccina da furetto, a partire dalla punta del naso. Puntato continuamente dagli occhi di Gere nel film, che si fa questi occhioni da imbrocco molto da borgata, ho deciso di osservare ancora la coppietta di innamoratini al mio fianco, sciogliersi nel loro brodo di cuoricini e piroette sulle ali. Penso che lei, la Parca bionda e zazzeruta, sia in realtà il vero produttore discografico del loro musical ascendente, uno che certo non appare mai come una cima rispetto ai suoi protetti talentuosi, un illetterato che sa però far di calcolo, che deve saper pianificare le attese del pubblico, come lei la Parca, a spingere sul sedile la sua bassa normalità, quella del suo dimenare i capelli sulla testiera, come se la stesse spolverando. Chiede ora in continuazione Coca-cola senza mai andare al bagno a pisciare o senza ruttare roboante, o almeno non si fa sentire, e se li tiene tutti dentro nel suo vuoto mortifero, intellettuale. Ché tanto parlare di funzioni vitali per lei è una sorta di ossimoro, e io ho ancora le cuffie che mi rintronano la testa, con Gere che mi scava le orecchie sospirando concetti di libertà e giustizia a qualche tardona da portarsi al letto assieme al catetere.

Pieno di livore, prefiguro allora i due piccioncini cantanti al mio fianco, all'improvviso scivolare giù dalle ali del velivolo, e venir dilaniati a metà dalle ali, con la parte superiore del busto che implora aiuto, mentre si sfalda piano piano congelandosi, aggrappata con le unghie nere al finestrino. La Parca ha tolto loro brutalmente tutti i tuoi fondi da produttore del musical. Quel produttore di musical, quel fabbricatore di panini al salmone al curaro, quel manager di hotel, quell'italiana moderata e lamentosa, che vola spesso tra San Antonio e New York in classe economica, solo per sentire l'odore di sudore plebeo dei suoi dannati prediletti – è una democratica, è una riformatrice, ama sentire l'odore del proprio elettorato, prima di divorarlo.

– Prima o poi tocca a tutti, ragazzi. È inutile che vi agitate tanto, guardate me. Mi sta pure addosso – faccio indicandomi le gambe, in direzione dei due innamoratini, che rimangono allibiti, le bocche sformate da un impiastro di saliva per la suzione reciproca che si stanno applicando da molto tempo, da molte ore. Sono passate infatti molte ore, e ho ancora la Parca col suo sedile. Non mi sento più le gambe. Non mi sento più gli occhi. Non mi sento più le orecchie. Non mi sento più lo stomaco. Mi assopisco.

Riallacciate le cinture, preparatevi all'atterraggio. Eccoci, penso risvegliandomi lentamente, la bocca ridotta ad un budello sfatto, forse è il *suo* momento buono, il suo obiettivo ritorna su di me, e forse, chissà, sugli altri – morire in compagnia ti dà però una spiacevole sensazione consumistica. Nel sonnecchiare, ho ancora addosso immagini inquietanti. Vuole farci battere una musata con l'aeromobile, vuole farci decollare le teste verso la cabina di pilotaggio, come in un gioco in cui è arbitro e giocatore, staccandole dal collo per l'urto e ammucchiandole lì, davanti alla porta, al di là della quale ci sono solo brandelli di piloti decomposti intrecciati alle cloche e agli apparecchi impietosi che segnano ancora la velocità e l'altitudine di poco fa, mentre tutto è già finito.

– Peccato, mi piaceva, quella risata smascherata, prima che tutto fosse finito – mi dico dentro la testa. Chiudo di nuovo gli occhi, stavolta meccanicamente. Ora si starà già librando trionfante dal cartoccio di umori color senape sulla pista d'atterraggio, l'eco persistente della sua risata smascherata che si espande nel suo vestito nero aperto. Un vestito che rivela un seno cadente e secco e le insenature del suo ventre ancora coperto di macchie, che diventano, prosciugandosi, fasce azzurrognole sul pube quasi bianco. Ride ancora, stavolta con astuzia rivelata, fino a svanire in un gorgo oscuro.

Tutto è infatti già finito. Gli spiriti dannati codardamente si fanno cadere le cinture sui fianchi e vanno stanchi assieme alla Parca verso l'uscita, biascicando il *good-bye* di routine alle hostess. La prossima volta chissà che non debba scegliere una prima classe, mentre il mio corpo recupera volume e scricchiola, le gambe rivivono e spunta l'indirizzo del dottore infallibile da dentro la mia tasca destra.

– Non dimenticare il tuo bagaglio a mano, Parca! – le grido, dandole un'altra opportunità.

Questo racconto è stato scritto nel 2009, e recava il titolo "In viaggio con la Parca".
È stato quindi rivisto nel 2011.

A proposito dell'autore

ALESSANDRO RAVEGGI (Firenze, 1980) è scrittore e studioso. Il suo ultimo libro è "La trasfigurazione degli animali in bestie" (Transeuropa, 2011). Ha pubblicato molti saggi, racconti e poesie su riviste nazionali e internazionali. È tra i primi firmatari di Generazione TQ. Attualmente lavora ad un secondo romanzo e ad un libro di prossima pubblicazione su Italo Calvino e le Americhe. Info: http://colossale.wordpress.com.